

Ciclos de Crescimento Goodwinianos: um estudo sob a perspectiva da complexidade*

Jaylson Jair da Silveira [†]

Resumo: No presente trabalho apresenta-se uma versão computacional baseada em agentes do modelo seminal de Goodwin (1967). Com esse modelo computacional pode-se estudar a interação entre distribuição de renda e acumulação de capital em uma economia com barganhas salariais descentralizadas. Foram feitas inúmeras simulações computacionais com 500 firmas e igual número de sindicatos de trabalhadores. As propriedades emergentes geradas por essas simulações reproduziram muitos dos resultados presentes no modelo macrodinâmico de Goodwin.

Palavras-chave: ciclos de crescimento; modelo de Goodwin; complexidade; modelagem computacional baseada em agentes.

Abstract: In this paper we build an agent-based computational version of the seminal Goodwin (1967)'s model. Based on this computational model, we are able to study the interaction between income distribution and capital accumulation in an economy characterized by decentralized wage bargaining structure. We carry out computational simulations with 500 firms e the same number of unions. The computational simulations showed aggregated regularities found in the original Goodwin's model.

Key words: growth cycle; Goodwin model; complexity; agent-based computational modeling.

JEL classification: E32

*Agradeço o auxílio do Prof. Dr. Aquino Lauri Espíndola (Departamento de Física/ICEx/UFF) na implementação do código-fonte em C. Naturalmente, os erros remanescentes são de minha exclusiva responsabilidade.

[†]Professor do Departamento de Economia e Relações Internacionais/UFSC. Endereço eletrônico: jaylson@cse.ufsc.br.

1 Considerações iniciais

Há mais de um século que economias de mercado, como Estados Unidos, Grã-Bretanha, França e Alemanha, apresentam flutuações recorrentes no nível da atividade econômica em torno de uma tendência ascendente. Flutuações recorrentes da taxa de crescimento da atividade econômica também são encontradas nas séries históricas das economias de mercado. Na busca de explicações para esses ciclos de crescimento, os economistas têm dividido seus esforços em duas áreas. Uma delas é a teoria do crescimento que, grosso modo, busca explicar os determinantes dessa tendência positiva de crescimento. A outra é a teoria dos ciclos de negócios, cujo objetivo central é explicar as oscilações verificadas em torno da tendência.

Os estudos teóricos sobre ciclos de negócios têm, historicamente, partido de duas visões alternativas sobre o cerne do mecanismo gerador de ciclos.¹ Um grupo de teorias e modelos parte do princípio de que o sistema econômico é estável, no sentido de que qualquer desvio da trajetória de equilíbrio tende a ser corrigido por mecanismos econômicos estabilizadores. Consequentemente, as explicações das oscilações fundamentadas nesta visão buscam a causa da persistência dos ciclos em choques exógenos ao sistema econômico, como por exemplo choques tecnológicos ou intervenções governamentais. Contrapondo-se a esta abordagem fundamentada em choques exógenos, encontra-se um grupo de teorias e modelos que parte do princípio de que as oscilações são geradas pelo *modus operandi* do sistema econômico, isto é, são um resultado intrínseco do funcionamento dos mercados, independentemente da presença de choques exógenos.

Nesse segundo grupo de estudos teóricos, bem como na área mais abrangente da dinâmica não-linear aplicada à análise macroeconômica, Richard M. Goodwin ocupa um lugar de destaque.² Para se ter uma idéia da importância de suas contribuições teóricas, o *Festschrift* dedicado a Goodwin, organizado por Velupillai (1990), contou com a participação de nada menos do que quatro laureados do Prêmio Nobel, a saber, Paul A. Samuelson, Robert M. Solow, Sir Richard Stone e Jan Tjebbergen.

Um dos principais trabalhos de Goodwin é *A Growth Cycle*, publicado em 1967 no *Festschrift* oferecido a Maurice Dobb. Nesse curto artigo, Goodwin constrói um modelo macrodinâmico cujo mecanismo gerador de ciclos é encontrado na interação, por meio da barganha salarial, entre distribuição de renda e acumulação de capital. A estrutura básica do trabalho em questão é a de um modelo de crescimento econômico, mais precisamente um modelo de crescimento com fecho clássico.³ A originalidade de *A Growth Cycle* está na combinação singular dessa estrutura básica com o princípio de que a oferta de trabalho, embora não reverta a tendência positiva de crescimento, é um fator limitante da sua cadência. Ademais, os ciclos de crescimento gerados no modelo de Goodwin não são decorrentes, à maneira de Frisch, de desvios de uma trajetória de crescimento equilibrado produzidos por um mecanismo de impulso (choques exógenos aleatórios) e corrigidos por um mecanismo de propagação localmente estável, nem do acoplamento de uma tendência exógena de crescimento a uma estrutura geradora de ciclos endógenos. Nesse modelo, ciclo e crescimento econômicos são indissociáveis, retratando o princípio goodwiniano: [...]

¹ Resenhas sobre teorias e modelos de ciclos econômicos podem ser encontradas em Blatt (1983), Dore (1993) e Gabish & Lorenz (1989).

² Goodwin faleceu em 1996.

³ Em Foley e Michl (1999) encontra-se um tratamento extensivo de vários modelos de crescimento econômico com fechos clássicos, neoclássicos e keynesianos.

de que crescimento gera ciclos e ciclos *interrompem* o crescimento (Goodwin e Punzo, 1987, p. 106, grifos no original, tradução própria).

O modelo de Goodwin (1967) gerou um área de pesquisa, ainda hoje muito ativa, cujos trabalhos buscam estender alguns resultados e/ou avaliar a robustez das conclusões encontradas no referido modelo. Um conjunto relativamente pequeno de trabalhos ligados à citada área se dedicou à elaboração de versões desagregadas de *A Growth Cycle*. O próprio Goodwin e co-autores (Goodwin *et al.*, 1984, p. 67-72) propuseram uma generalização multissetorial de seu modelo de ciclo de crescimento agregado com base na transformação de coordenadas gerais normalizadas.⁴ Na mesmo ano, Silverberg (1984) utilizou-se de uma versão desagregada de *A Growth Cycle* para estudar o processo de nascimento e morte de tecnologias. No ano seguinte, Sato (1985) generalizou o modelo agregado de Goodwin utilizando os esquemas departamentais de Marx.

No presente artigo, como nos trabalhos de Goodwin *et al.* (1984, p. 67-72) e Sato (1985), pretende-se mostrar que algumas propriedades macroeconômicas do modelo seminal de Goodwin aparecem em uma versão desagregada deste. Todavia, diferentemente desses dois trabalhos, não se faz aqui uma desagregação multissetorial convencional. Propõe-se uma desagregação do palco central da dinâmica goodwiniana, ou seja, do mercado de trabalho. Essa desagregação é feita supondo-se que haja um mercado de trabalho interno a cada firma, onde seus gestores negociam salários com um colegiado de trabalhadores. Esses mercados de trabalho internos formam uma estrutura de barganha salarial descentralizada, heterogênea e, frise-se, não sujeita a qualquer instância global e externa de controle. Ademais, todas as firmas e sindicatos de trabalhadores são heterogêneos e, a cada período, adaptam suas propostas salariais ao ambiente macroeconômico que resultou de suas interações passadas, gerando com isso, possivelmente, um novo estado macroeconômico.

A estrutura desagregada acima esboçada e a co-evolução dos processos adaptativos individuais e do estado macroeconômico são características típicas de um *sistema complexo*. Como bem sintetiza Freitas (2003, p. 14): (a) os sistemas complexos são compostos por inúmeros agentes heterogêneos capazes de aprender e adaptar-se às mudanças do ambiente em que estão inseridos; (b) os agentes interagem diretamente, por mecanismo de *feedback* que afetam suas escolhas; e (c) apresentam padrões de auto-ordenamento e estruturas emergentes de um para outro nível hierárquico superior. Em suas próprias palavras (Freitas, 2003, p. 15): ... *a partir da identificação dessas três características, pode-se dizer que um sistema é do tipo complexo quando: a) suas partes são inteligentes, adaptativas e b) interagem mutuamente, gerando uma c) estrutura emergente, evolucionária e com 'personalidade' própria* (Grifos no original).

Com base na caracterização anterior de um sistema complexo, pode-se estabelecer com mais precisão o objetivo do presente trabalho. Pretende-se mostrar a partir da perspectiva da complexidade, e usando a metodologia computacional baseada em agentes a ela associada,⁵ que algumas propriedades macroeconômicas que foram deduzidas por Goodwin (1967) podem ser geradas como propriedades emergentes de uma economia computacional com um estrutura microeconômica goodwiniana.

O presente trabalho está organizado como segue. Na próxima seção, apresenta-se o modelo de

⁴Uma síntese da modelagem multissetorial proposta por Goodwin é encontrada em Rosinger (2001).

⁵Sobre esta metodologia, vide o *Handbook of computational economics: agent-based computational economics* (Tesfatsion & Judd, 2006).

Goodwin (1967). Na terceira seção, constrói-se um modelo goodwiniano computacional baseado em agentes e analisa-se algumas propriedades macroeconômicas emergentes, contrastando-as com resultados gerados no modelo original de Goodwin. Na última seção, como de praxe, fecha-se o trabalho com breves considerações finais.

2 Ciclos de crescimento goodwinianos

Goodwin (1967), em seu clássico artigo *A Growth Cycle*, apresenta um modelo macrodinâmico no qual a interação entre distribuição de renda e acumulação de capital gera uma trajetória que flutua em torno de (sem convergir para) um estado de crescimento equilibrado, ou seja, um *ciclo de crescimento*. Tais flutuações recorrentes não se constituem em meros desvios de uma trajetória de crescimento equilibrado gerados por um mecanismo de impulso (choques exógenos aleatórios) e amortizados por um mecanismo de propagação localmente estável, ou seja, não são flutuações do tipo Frisch. Também não são resultado do acoplamento de uma tendência de crescimento exogenamente determinada e um mecanismo gerador de ciclos endógenos. Em *A Growth Cycle*, ciclo e crescimento econômicos estão ligados de modo inextricável.

O modelo de Goodwin (1967) é construído a partir das seguintes suposições:

Suposição 1: o sistema produtivo utiliza dois insumos, a saber, capital e trabalho, os quais são homogêneos e não-específicos, e produz um único bem homogêneo, o qual pode ser consumido ou utilizado como bem de capital.

Suposição 2: o progresso técnico configura-se como sendo do tipo desincorporado (*disembodied*) e puramente aumentador de trabalho, ou seja, a produtividade média do trabalho $a = \frac{Y}{L}$, sendo Y o produto e L a quantidade empregada de trabalho, cresce a uma taxa constante e exogenamente determinada $\alpha > 0$, tal que $\hat{a} = \alpha$.⁶

Suposição 3: o tamanho da população N , igual a força de trabalho, expande-se a uma taxa constante e exogenamente determinada $\beta > 0$, ou seja, $\hat{N} = \beta$.

Suposição 4: a razão capital-produto $\sigma = \frac{K}{Y}$, sendo K a quantidade de capital, mantém-se constante, ou seja, $\hat{\sigma} = 0$.

Suposição 5: os salários são todos gastos em bens de consumo, enquanto os lucros são completamente poupados e instantaneamente gastos em bens de capital, isto é, automaticamente investidos.

Suposição 6: o preço do produto é o numerário do sistema de preços ($P = 1$) e as variáveis econômicas que compõem o modelo são consideradas expressas em termos reais e líquidos (sem depreciação).

Suposição 7: há uma relação direta entre a taxa de crescimento do salário real \hat{w} e a taxa de emprego $v = \frac{L}{N}$, ou seja, $\hat{w} = f(v)$ tal que $f'(v) > 0$ para $0 \leq v < 1$. Ademais, conforme representado na Figura 1, o salário real sofre uma aceleração próxima à barreira do pleno emprego, isto é, $\lim_{v \rightarrow 1^-} f(v) = +\infty$ e $\lim_{v \rightarrow 0^+} f(v) < 0$.

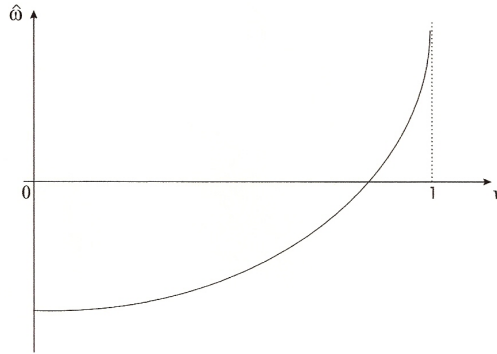


Figura 1: *Função barganha goodwiniana.*

Pela suposição 1 são desconsideradas as diferenças de habilidade entre trabalhadores e as diferenças técnicas/econômicas entre as unidades de capital (homogeneidade). Ainda por essa suposição, tem-se que os trabalhadores e o capital fixo podem ser deslocados de um setor para outro instantaneamente e sem custos (não-especificidade).

A suposição 2 implica na adoção explícita de uma concepção simples de progresso técnico, o qual flui continuamente e tem sua fonte indeterminada, ou seja, que “cai como maná dos céus”. Mais precisamente, tem-se um progresso técnico do tipo Harrod-neutro.

Com relação à suposição 3, cabe destacar que esta determina somente a evolução da oferta de mão-de-obra, ou seja, não é correto inferir desta a existência de um estado de pleno emprego. Na realidade, este nunca é alcançado por hipótese, como posto explicitamente na suposição 7, na qual postula-se uma curva de Phillips “real” que obedece a restrição de que $\hat{w} \rightarrow +\infty$ quando $v \rightarrow 1^-$.

A suposição 5 nada mais é do que a hipótese clássica sobre a poupança, que implica na adoção da lei de Say. Portanto, no modelo em questão é desconsiderado o problema da demanda efetiva. Todavia, como defende Blatt (1983, p. 207), esta suposição não é tão arbitrária dado que não há qualquer setor financeiro no modelo. Logo, como o modelo incorpora somente o lado real de uma economia (cf. suposição 6), então não se abre qualquer possibilidade dos agentes econômicos reterem moeda ou qualquer outro ativo financeiro.

Goodwin (1967, p. 54) comenta que somente as suposições 4 e 7 são as mais sujeitas à controvérsias. Entretanto, as suposições de um progresso técnico estacionário e a hipótese de existência de equilíbrio automático entre poupança e investimento não são menos controversas do que as anteriormente citadas.

O modelo de ciclos de crescimento de Goodwin envolve as taxas de crescimento instantâneas da *participação dos salários na renda*, denotada por u , e da *proporção empregada da força de trabalho*

⁶Como de praxe, um ponto sobre uma variável x qualquer indica que se está lidando com sua taxa (instantânea) de variação, ou seja, $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$. Por sua vez, o acento circunflexo sobre uma variável x qualquer indica que se está lidando com sua taxa (instantânea) de crescimento, isto é, $\hat{x} \equiv \frac{\dot{x}}{x}$.

(taxa de emprego). Dessa maneira, nesse modelo macrodinâmico é gerado um comportamento cíclico não do nível, mas da taxa de crescimento do produto. Adiante, seguem as derivações das duas equações diferenciais ordinárias que determinam a transição de estado do modelo de Goodwin.

Aplicando-se o operador de logaritmo à definição $v = \frac{L}{N}$ e derivando a expressão resultante com respeito ao tempo, obtém-se:

$$\hat{v} = \hat{L} - \hat{N}. \quad (1)$$

Logo, para determinar o comportamento da taxa de emprego, faz-se necessário estabelecer as equações de comportamento das taxas de crescimento da força de trabalho e da quantidade empregada de trabalho. Pela suposição 3, a taxa de crescimento da força de trabalho é tomada como sendo constante e igual a β , restando, portanto, a determinação da quantidade empregada de trabalho, a qual não é obtida tão diretamente quanto a primeira.

Aplicando-se o operador de logaritmo à definição de produtividade do trabalho, encontrada na suposição 2, e derivando o resultado com relação ao tempo, chega-se a:

$$\hat{L} = \hat{Y} - \hat{a}. \quad (2)$$

Como se pode ver, a taxa de crescimento da quantidade empregada de trabalho depende das taxas de crescimento do produto e da produtividade média do trabalho. Esta última, pela suposição 2, é constante e igual a α . Resta, então, a determinação da taxa de crescimento do produto.

Dado que a razão capital-produto é constante, suposição 4, segue que a taxa de crescimento do produto é igual a taxa de crescimento do estoque de capital:

$$\hat{Y} = \hat{K}. \quad (3)$$

Pela hipótese de homogeneidade e não-especificidade do trabalho, suposição 1, existe um, e somente um, salário real na economia. Portanto, a participação do salário na renda pode ser definida como:

$$u = \frac{wL}{Y}. \quad (4)$$

Pela suposição 5, tem-se que a massa de lucro é igual a poupança. Logo, com base em (4) pode-se escrever:

$$S = Y - wL = \left(1 - \frac{wL}{Y}\right) Y = (1 - u) Y. \quad (5)$$

Ainda com base na suposição 5, tem-se que a poupança e o investimento agregados sempre se igualam, isto é, $S = I$. Além disso, dado que as variáveis estão expressas em termos líquidos, suposição 6, então a variação em termos absolutos no estoque de capital é igual ao volume de investimento, $\dot{K} = I$. Portanto,

considerando (5), a variação no estoque de capital é dada por:

$$\dot{K} = (1 - u)Y. \quad (6)$$

Multiplicando ambos os lados de (6) por $\frac{1}{K}$ e utilizando a suposição 4, obtém-se a taxa de crescimento do estoque de capital:

$$\widehat{K} = \frac{1}{\sigma}(1 - u), \quad (7)$$

que é igual a taxa de lucro da economia.

Dada a identidade em (3), pode-se inserir (7) em (2), o que, juntamente com a suposição 2, permite expressar a taxa de crescimento da quantidade empregada de trabalho como:

$$\widehat{L} = \frac{1}{\sigma}(1 - u) - \alpha. \quad (8)$$

Finalmente, a equação diferencial ordinária que governa a evolução da taxa de emprego é obtida inserindo-se a suposição 3 e a função (8) em (1):

$$\widehat{v} = \frac{1}{\sigma}(1 - u) - (\alpha + \beta). \quad (9)$$

Por trás de (9) existe o seguinte conjunto de interações. Ao variar a distribuição de renda em favor (desfavor) dos trabalhadores, a massa de lucro cresce menos que o produto. Isso gera, por sua vez, a contração (expansão) da rentabilidade do capital e, conseqüentemente, do investimento e da taxa de crescimento do produto. Essa queda (elevação) acarreta na redução (expansão) do ritmo de crescimento da quantidade empregada de trabalho, o que implica, dado o crescimento exponencial da produtividade do trabalho e da população, uma queda (elevação) da taxa de crescimento da taxa de emprego.

A equação diferencial ordinária relacionada à evolução da participação dos salários na renda é derivada a seguir. Lembrando-se que a produtividade média do trabalho é $a = Y/L$ (cf. suposição 2), pode-se reescrever a expressão (4) como segue:

$$u = \frac{w}{a}. \quad (10)$$

Aplicando-se o operador de logaritmo à expressão (10) e derivando o resultado com relação ao tempo, obtém-se:

$$\widehat{u} = \widehat{w} - \widehat{a}. \quad (11)$$

A partir das suposições 2 e 7, a taxa instantânea de crescimento da participação dos salários na renda (11) pode ser reexpressa como:

$$\widehat{u} = f(v) - \alpha. \quad (12)$$

Goodwin toma uma aproximação linear da função barganha $f(v)$ na vizinhança do pleno emprego

($v = 1$), a saber:

$$f(v) = -\gamma + \delta v, \tag{13}$$

com $\gamma > 0$ e $\delta > 0$ constantes.

Enfim, com a substituição de (13) em (12), chega-se a outra equação diferencial ordinária do modelo de Goodwin, a saber:

$$\hat{u} = -(\alpha + \gamma) + \delta v. \tag{14}$$

Esta relação positiva entre a taxa de crescimento da participação do salário na renda e a taxa de emprego advém diretamente da postulação de uma curva de Phillips “real”, já que a taxa de crescimento da produtividade do trabalho é constante. Existe mais de uma explicação sobre o mecanismo subjacente a esta curva de Phillips. Skott (1989, p. 36) sugere como explicação o aumento do poder de barganha dos trabalhadores devido aos aumentos na taxa de crescimento da proporção empregada da força de trabalho, ou em termos marxistas, um reforço do poder de luta da classe trabalhadora advinda da redução do exército industrial de reserva. Este ponto destacado por Skott é encontrado em Goodwin (1967, p. 58). Dore (1994, p. 207) fornece outra explicação argumentando que Goodwin (1967, p. 58) sugere que o trabalho auferir uma "renda de escassez". De fato Goodwin no final do último parágrafo da referida página afirma que esta renda existe e é gerada pelo fato de que a oferta de trabalho de longo prazo não é função do salário real. Dore assevera que esta oferta de trabalho de longo prazo (e mesmo de médio prazo) está em função de fatores que influenciam na reprodução do trabalho (treinamento de reciclagem, educação formal, alimentação, etc) e que esta reprodução demanda um tempo considerável, defasagem esta que é retratada no coeficiente angular da curva de Phillips linearizada.

Em suma, o modelo de ciclo de crescimento de Goodwin (1967) é expresso em termos das duas equações diferenciais ordinárias (9) e (14), cujo espaço de estados economicamente significativos é dado por $\Theta = \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : u \leq 1, v \leq 1\}$.

Este sistema dinâmico é formalmente idêntico ao modelo predador-presa de Lotka-Volterra da Biologia. Como destaca o próprio Goodwin (1967, p. 55):

De certo modo, a similaridade é puramente formal, mas não inteiramente. Por longo tempo pareceu-me que o problema de Volterra da simbiose de duas populações - em parte complementares, em parte hostis - é útil no entendimento das contradições dinâmicas do capitalismo, especialmente quando estabelecido numa forma mais ou menos marxista. (tradução própria)

Com respeito a parte final da citação acima, já que o conflito distributivo desempenha um papel central na explicação do ciclo, o modelo de Goodwin é considerado por muitos como marxista em sua essência. Blatt (1983, p. 204) afirma que o modelo de Goodwin não é marxista, mas sim pós-keynesiano, pois neste a média de longo prazo da participação dos trabalhadores na renda permanece constante, o que não bate com a proposição marxista da existência de uma progressiva pauperização dos trabalhadores. Medio (1985) ofereceu uma classificação do modelo de Goodwin mais consistente e convincente. Para este autor o modelo de Goodwin enquadra-se como um modelo clássico. Medio (1985, p. 173) justifica sua classificação argumentando que o modelo de Goodwin não é um modelo orientado pela demanda, como

os modelos de inspiração keynesiana-kaleckiana, e que este contém duas idéias básicas que remontam aos economistas clássicos (Adam Smith, Ricardo e Marx). A primeira destas idéias se refere ao comportamento do capitalista, o qual devido ao ambiente econômico e social em que esta inserido tende a poupar e investir seus lucros tanto quanto possa não levando em consideração o efeito agregado sobre a taxa de lucro. A segunda idéia está ligada ao mecanismo pelo qual a acumulação de capital comprime a lucratividade. A acumulação de capital expande a demanda por trabalho e a proporção da força de trabalho empregada aumenta, desde que o progresso técnico e o crescimento populacional não neutralizem este efeito. Isto aumentará o poder de barganha dos trabalhadores e, portanto, aumentará o salário real e, conseqüentemente, mais cedo ou mais tarde haverá contrações nos lucros.

As equações (9) e (14) possuem dois pontos de equilíbrio, a saber, um ponto de equilíbrio trivial $(u, v) = (0, 0)$ e o ponto de equilíbrio economicamente significativo $(u, v) = (1 - \sigma(\alpha + \beta), \frac{\alpha + \gamma}{\delta})$. Pode-se demonstrar⁷ que o primeiro ponto é instável, mais precisamente um ponto de sela, enquanto o segundo é estável no sentido de Lyapunov, ou seja, a dinâmica do sistema oscila em torno dele.⁸

Na Figura 2 encontra-se um esboço de um ciclo de crescimento goodwiniano. Sem perda de generalidade, suponha-se que o sistema inicie no ponto A, onde a participação dos salários na renda atinge seu menor valor e a taxa de emprego encontra-se em equilíbrio. Neste ponto a taxa de lucro é máxima. Esta situação leva os capitalistas a aumentarem a taxa de crescimento do estoque de capital e, portanto, a do produto. Esta expansão na produção leva a um aumento da quantidade empregada de trabalho e, conseqüentemente, da taxa de emprego. Entretanto, o aumento desta taxa eleva a taxa de crescimento do salário real, o que implica uma contínua compressão da taxa de lucro. Apesar disto, a economia atinge o nível de equilíbrio da participação do salário na renda e o nível máximo da taxa de emprego (ponto B). Neste instante o poder de barganha dos trabalhadores está no seu ápice. A partir daí o salário real continua crescendo provocando uma contínua queda da taxa de lucro e da taxa de emprego. Tal processo se desenrola até a taxa de emprego atingir novamente seu ponto de equilíbrio, porém agora com a participação dos salários na renda atingindo seu máximo (ponto C). A partir deste estágio, a taxa de emprego continua a cair e, por conseguinte, o poder de barganha dos trabalhadores também. A taxa de crescimento do salário real cai abaixo da taxa de crescimento da produtividade do trabalho. Assim, a taxa de lucro começa a se recuperar. Este processo se desenrola até a economia atingir o nível de equilíbrio da participação dos salários na renda e o menor nível de emprego (ponto D). Neste estágio o poder de barganha dos trabalhadores está enfraquecido e a taxa de lucro encontra-se num patamar suficientemente alto para induzir os capitalistas a acelerar o crescimento do produto. Assim, a taxa de emprego começa a expandir-se e, já que a taxa de crescimento do salário real ainda encontra-se abaixo da crescimento da produtividade, a taxa de lucro também. Esta expansão do emprego e da taxa de lucro ocorrerá até a taxa de emprego atingir o seu nível de equilíbrio e a participação dos salários o seu limite inferior (ponto A). A partir deste ponto o ciclo reinicia.

Como destacado em Silveira (2001, p. 24), o mecanismo gerador de ciclos anteriormente descrito é, para Goodwin, uma característica importante da macrodinâmica cíclica das economias capitalistas. Aumentos na rentabilidade conduzem à aceleração da acumulação de capital e da taxa de emprego. Isto, por sua vez, leva a um aumento do poder de barganha dos trabalhadores, o que gera expansões da participação dos salários na renda e reduções da taxa de lucro, levando à desaceleração da acumulação

⁷Vide Silveira (2001, cap. 1)

⁸Sem convergir assintoticamente ou se afastar indefinidamente do referido ponto de equilíbrio

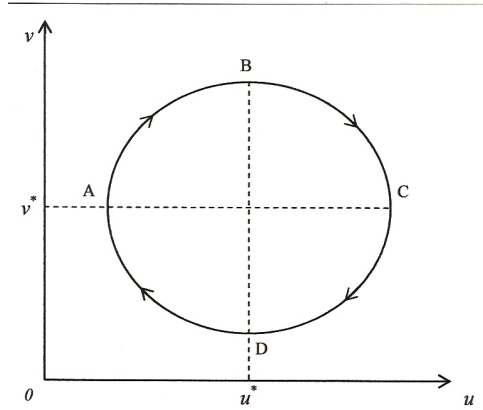


Figura 2: Um ciclo de crescimento goodwiniano.

de capital e da taxa de emprego, enfraquecendo o poder de barganha dos trabalhadores e recuperando a taxa de lucro. Nas palavras do próprio Goodwin (1967, p. 58):

[...] O aumento na rentabilidade traz a semente de sua própria destruição por gerar uma expansão vigorosíssima do produto e do emprego, destruindo então o exército industrial de reserva e fortalecendo o poder de barganha do trabalho. Este inerente conflito e complementaridade entre trabalhadores e capitalistas é típico da simbiose. (tradução própria)

Sobre o modelo de Goodwin cabe ainda registrar dois comentários que serão relevantes como referência na subseção 3.4, onde avaliar-se-á algumas propriedades macroeconômicas geradas pelo modelo computacional baseado em agentes a ser desenvolvido a seguir. Primeiramente, o sistema dinâmico composto pelas equações (9) e (14) não é positivamente invariante no espaço de estados Θ . Em outras palavras, tanto a participação dos salários na renda quanto a taxa de emprego podem assumir valores maiores que um durante certas fases de um ciclo, a depender do estado inicial (valores iniciais da participação dos salários na renda e da taxa de emprego) da economia e/ou dos valores dos parâmetros do modelo.

O segundo comentário diz respeito a uma conclusão quantitativa do modelo. Independentemente do estado inicial da economia, essa apresentará valores médios constantes da participação do salário na renda (\bar{u}) e da taxa de emprego (\bar{v}), para uma dada configuração de valores dos parâmetros. Esses valores médios são os próprios valores de equilíbrio do modelo, ou seja:⁹

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds = 1 - \sigma(\alpha + \beta) \quad \text{e} \quad \bar{v} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T v(s) ds = \frac{\alpha + \gamma}{\delta}. \quad (15)$$

⁹Essa propriedade pode ser demonstrada formalmente (Gandolfo, 1996, p. 480). Com efeito, seja t' o início de um período arbitrário de um ciclo e t'' o instante final desse período. Lembrando que $\hat{u} = \frac{d \ln u}{dt}$ e $\hat{v} = \frac{d \ln v}{dt}$, as equações (9) e (14) podem ser integradas, resultando:

$$\ln(v(t'')/v(t')) = \left[\frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right] (t'' - t') - \frac{1}{\sigma} \int_{t'}^{t''} u(s) ds \quad \text{e} \quad \ln(u(t'')/u(t')) = -(\alpha + \gamma)(t'' - t') + \delta \int_{t'}^{t''} v(s) ds.$$

Como $u(t') = u(t'')$ e $v(t') = v(t'')$, segue que $\ln(u(t'')/u(t')) = \ln(v(t'')/v(t')) = 0$, o que permite inferir das igualdades acima as médias em (15), onde $T = t'' - t'$ e, sem perda de generalidade, $t' = 0$.

Portanto, segundo o modelo, a média da participação do salário na renda baixaria (aumentaria) caso a razão capital-produto, a taxa de progresso técnico ou a taxa de crescimento populacional aumentasse (diminuisse). Por sua vez, a média da taxa de emprego cairia (aumentaria) se a taxa de progresso técnico diminuisse (aumentasse) ou se função barganha se deslocasse para baixo (cima), ou seja, se o parâmetro γ diminuisse (aumentasse). Além disso, a sensibilidade do salário real na vizinhança do pleno emprego, parâmetro δ , afeta negativamente a média da taxa de emprego.

3 Um modelo goodwiniano computacional baseado em agentes

O modelo computacional baseado em agentes aqui proposto consiste, basicamente, na interação entre firmas e sindicatos de trabalhadores sob o formato de um leilão duplo ao longo de sucessivos períodos. No início de um período t ocorrem as barganhas salariais, nas quais são negociados os salários que serão pagos durante o referido período. Após a conclusão das barganhas salariais, as produções são realizadas, os salários são pagos e completamente gastos em bens de consumo e, finalmente, os lucros são todos gastos em bens de capital. Em suma, um período t inicia com a abertura das barganhas salariais e termina com a distribuição e gasto dos salários e lucros.

Entre quaisquer períodos t e $t + 1$, tanto firmas como sindicatos reavaliam suas propostas salariais com base nas suas recompensas (*payoffs*) e decidem quais propostas farão no início do período $t + 1$. Este processo de escolha de propostas salariais é representado como um algoritmo de aprendizado por reforço (*reinforcement learning algorithm*). Na próxima subseção a estrutura desagregada do sistema econômico será estabelecida. O processo de barganha será descrito na subseção 3.2. O processo de aprendizado será exposto na subseção 3.3. Finalmente, na subseção 3.4 apresentar-se-á algumas propriedades macroeconômicas emergentes geradas pelas simulações computacionais.

3.1 Estrutura microeconômica

Considere um sistema econômico com barganhas salariais descentralizadas, na qual há um mercado de trabalho interno a cada firma, os colegiados de trabalhadores negociam a cada período o salário real diretamente com os gestores das suas respectivas firmas.

A estrutura produtiva desta economia é composta por F firmas que produzem um bem homogêneo a partir da seguinte tecnologia Leontief:

$$Y_j(t) = \text{Min} \left\{ \frac{K_j(t)}{\sigma}, a(t)L_j(t) \right\}, \text{ com } j = 1, 2, \dots, F, \quad (16)$$

sendo $Y_j(t)$ a produção, $K_j(t)$ a quantidade de capital, $L_j(t)$ a quantidade de trabalho e $a(t)$ a produtividade média do trabalho (razão produto-trabalho) da j -ésima firma em um dado período t . A constante σ é a razão capital-produto, tomada como constante e exogenamente determinada.

Como em Goodwin (1967), supõe-se que o progresso técnico é do tipo Harrod-neutro, ou seja, que a produtividade média do trabalho cresce a uma taxa constante e exogenamente determinada $\alpha > 0$,

isto é:

$$a(t) = (1 + \alpha)a(t - 1). \quad (17)$$

Seguindo Goodwin (1967), adotar-se-á a hipótese clássica sobre a poupança. Supondo-se que cada firma j converte toda sua massa de lucro em investimento e que o capital não se deprecia, a taxa de lucro da j -ésima firma no período $t - 1$ é dada por:

$$\rho_j(t - 1) \equiv \frac{Y_j(t - 1) - w_j(t - 1)L_j(t - 1)}{K_j(t - 1)} = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{w_j(t - 1)}{a(t - 1)} \right], \text{ com } j = 1, 2, \dots, F. \quad (18)$$

A taxa de lucro da firma j determina sua taxa de crescimento do estoque de capital do período $t - 1$ para o período t , de maneira que o estoque de capital da firma j em t é dado por:

$$K_j(t) = [1 + \rho_j(t - 1)]K_j(t - 1), \text{ com } j = 1, 2, \dots, F. \quad (19)$$

Como em Goodwin(1967), supõe-se que o sistema econômico é limitado pelo tamanho da força de trabalho. Logo, considerando a tecnologia Leontief (16), a quantidade de trabalho empregada em cada firma $j = 1, 2, \dots, F$ é dada por:

$$L_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{a\sigma}K_j(t), & \text{se } K_j(t) < a\sigma N_j(t), \\ N_j(t), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (20)$$

sendo $N_j(t)$ o tamanho do sindicato j no período t , isto é, o número de trabalhadores vinculados ao sindicato j no período t .

Para manter a estrutura do modelo computacional próxima a do modelo de Goodwin (1967), supor-se-á que todos os sindicatos crescem a uma taxa constante $\beta > 0$, ou seja,

$$N_j(t) = (1 + \beta)N_j(t - 1), \text{ com } j = 1, 2, \dots, F. \quad (21)$$

Isso implica que a força de trabalho da economia cresce a esta taxa.

A recompensa (*payoff*) do sindicato j em t não depende apenas do acordo salarial alcançado neste período, mas também da quantidade empregada de trabalhadores pela firma j , determinada por (20). Supor-se-á que cada sindicato j leva em consideração todos os seus membros, tal que sua recompensa é dada pelo salário por trabalhador sindicalizado:

$$\frac{L_j(t)w_j(t)}{N_j(t)}, \text{ com } j = 1, 2, \dots, F. \quad (22)$$

3.2 Processo de barganha salarial

Como já dito, no início de cada período $t = 1, 2, \dots$, antes da produção ser realizada, cada firma e respectivo sindicato de trabalhadores entram em um processo de barganha salarial. Os gestores da firma

j apresentam sua proposta salarial (oferta salarial) e o respectivo colegiado de trabalhadores, sindicato j , sua reivindicação salarial (demanda salarial). Tanto as demandas quanto as ofertas salariais assumem valores no seguinte conjunto de números racionais:

$$W(t) = \left\{ 0, \frac{a(t)}{M-1}, \frac{2a(t)}{M-1}, \dots, \frac{(M-3)a(t)}{M-1}, \frac{(M-2)a(t)}{M-1}, a(t) \right\}, \quad (23)$$

sendo $M \geq 2$ um número natural exogenamente determinado, que representa o número de propostas salariais possíveis de serem escolhidas tanto pelas firmas quanto pelos sindicatos no período t . Denotando por $w_{j,m}^d(t)$ a demanda salarial m do sindicato j no período t e por $w_{j,m}^s(t)$ a oferta salarial da firma j no período t , a proposta (demanda ou oferta) salarial $m \in \{1, 2, 3, \dots, M-2, M-1, M\}$ do agente (sindicato ou firma) j no período t pode ser sinteticamente representada como segue:

$$w_{j,m}^\ell(t) = \frac{(m-1)a(t)}{M-1} \in W(t), \text{ com } \ell = d, o. \quad (24)$$

Suponha-se que no início do período t o sindicato faça a demanda salarial m' e a firma j a oferta salarial m'' . Se $w_{j,m'}^d(t) > w_{j,m''}^o(t)$ não haverá acordo possível na barganha salarial entre o sindicato j e a firma j no período t , isto é, na barganha (j, t) . Todavia, se $w_{j,m'}^d(t) \leq w_{j,m''}^o(t)$, o fechamento de um acordo salarial torna-se factível. Nesse caso, o acordo salarial observado na barganha (j, t) , denotado por $w_j(t)$, será qualquer valor entre a demanda e a oferta salarial, isto é, será um elemento do seguinte conjunto de acordos salariais viáveis:¹⁰

$$A_j(t) = \{x \in \mathbb{R}_+ : w_{j,m'}^d(t) \leq x \leq w_{j,m''}^o(t)\}. \quad (25)$$

Como em Goodwin (1967), supõe-se que o acordo salarial observado em cada barganha depende, fundamentalmente, do tamanho do exército industrial de reserva naquele período. Como visto na seção 2, o referido autor formalizou este argumento por meio de uma função barganha, que estabelece uma relação positiva entre a taxa de crescimento do salário real e a taxa de emprego, inversamente proporcional ao tamanho do exército industrial de reserva. No modelo computacional aqui proposto esta formalização goodwiniana será substituída por um algoritmo computacional, o qual passar-se-á a descrever.

Em barganhas com acordos viáveis, quanto maior a taxa de emprego, definida no presente contexto como:

$$v(t) = \frac{\sum_{j=1}^F L_j(t)}{\sum_{j=1}^F N_j(t)}, \quad (26)$$

maior a chance do acordo salarial $w_j(t)$ estar mais próximo da oferta salarial $w_{j,m''}^o(t)$. Esta idéia foi implementada computacionalmente da seguinte maneira. Primeiramente, tomou-se a seguinte função sigmóide da taxa de emprego da economia:

$$g(v(t)) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(v(t)-\mu)}}, \quad (27)$$

¹⁰Naturalmente, se $w_{j,m''}^o(t) < w_{j,m'}^d(t)$ não existe um $x \in \mathbb{R}_+$ que satisfaça, simultaneamente, as desigualdades $x \geq w_{j,m'}^d(t)$ e $x \leq w_{j,m''}^o(t)$. Dessa forma, se $w_{j,m''}^o(t) < w_{j,m'}^d(t)$ segue que $A_j(t) = \emptyset$.

com parâmetros $\lambda > 0$ e $0 < \mu < 1$. O gráfico desta função encontra-se ilustrado na Figura 3 para três combinações de parâmetros. Esta função apresenta propriedades que serão relevantes no que segue. Nota-se que (27) intersecciona o eixo das ordenadas no ponto $g(0) = \frac{1}{1+e^{\lambda\mu}} > 0$, que pode ser feito tão próximo de zero quanto se queira, bastando para isto fixar um λ grande o suficiente para um dado valor μ . Simetricamente, a imagem da função sigmóide no pleno emprego é dada por $g(1) = \frac{1}{1+e^{-\lambda(1-\mu)}} < 1$, que também pode ser feita tão próxima de um quanto se desejar de 1, bastando fixar um λ grande o suficiente para um dado valor μ . Em síntese, para um dado valor μ , aumentando-se o valor de λ faz com que a função passe tão próximo de zero em $v(t) = 0$ e de um em $v(t) = 1$ quanto se queira. Outra característica desta função é a de que ela apresenta convexidade estrita para valores da taxa de emprego menores do que μ e concavidade estrita para valores maiores. A escolha desta função sigmóide foi inspirada na argumentação de Goodwin de que próximo à barreira de pleno emprego os salários crescem fortemente.

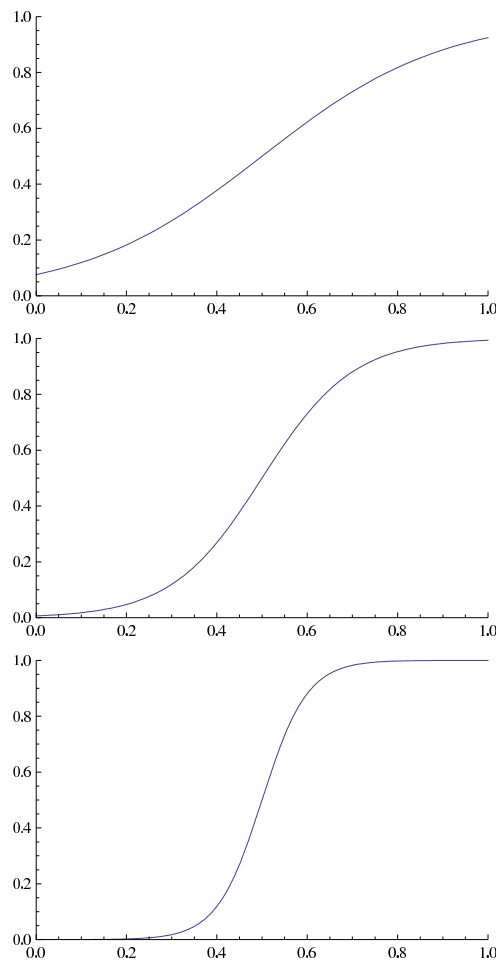


Figura 3: *Função sigmóide. Parâmetros: $\mu = 0,5$, de cima para baixo: $\lambda = 5, \lambda = 10, \lambda = 15$.*

Utilizando-se a função sigmóide (27), construiu-se, a partir do conjunto de acordos salariais

possíveis (25), os seguintes subconjuntos:

$$A_j^i(t) = \{x \in A_j(t) : w_{j,m'}^d(t) \leq x \leq [1 - g(v(t))] w_{j,m'}^d(t) + g(v(t)) w_{j,m''}^o(t)\}, \quad (28)$$

$$A_j^s(t) = \{x \in A_j(t) : [1 - g(v(t))] w_{j,m'}^d(t) + g(v(t)) w_{j,m''}^o(t) \leq x \leq w_{j,m''}^o(t)\}. \quad (29)$$

A fronteira entre o conjunto (28), de acordos salariais inferiores, e o conjunto (29), de acordos salariais superiores, é dada pelo salário $[1 - g(v(t))] w_j^d(t) + g(v(t)) w_j^o(t)$, que é uma combinação linear entre a demanda e a oferta salarial na barganha (j, t) . Desde que $g(v(t))$ é uma função estritamente crescente da taxa de emprego da economia, segue que a referida fronteira será tanto mais próximo da oferta salarial quanto maior for esta taxa.

No algoritmo computacional, após cada agente j escolher sua proposta salarial em t , determinou-se o resultado de cada barganha (j, t) viável¹¹ com base na seguinte regra. Após se gerar um número aleatório¹² $n(t) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ comparou-se este com $g(v(t))$. Se $n(t) \leq g(v(t))$, escolheu-se aleatoriamente um $w_j(t)$ no subconjunto $A_j^s(t)$, caso contrário escolheu-se aleatoriamente um $w_j(t)$ no subconjunto $A_j^i(t)$.

Assim, considerando a função sigmóide (27), quanto maior a taxa de emprego da economia maior será a imagem $g(v(t))$, que é a probabilidade do acordo salarial $w_j(t)$ estar em $A_j^s(t)$.¹³ Ademais, com elevações da taxa de emprego da economia a distância entre o menor acordo salarial superior,¹⁴ $[1 - g(v(t))] w_j^d(t) + g(v(t)) w_j^o(t)$, e a oferta salarial,¹⁵ $w_j^o(t)$, da firma j em t diminui, tendendo a zero quando esta taxa tende a um (pela esquerda). A resultante destes dois efeitos da taxa de emprego sobre o resultado de cada barganha viável é de que cada barganha tenha um resultado tendendo a oferta salarial quando a economia tende ao pleno emprego.

3.3 Processo de revisão das propostas salariais

Como já posto, em um dado período t após cada processo de barganha salarial ter ocorrido, as produções são realizadas e, em seguida, a produção é distribuída na forma de salários e lucros, sendo este último completamente investido. Entre o final do período t e o início de uma nova rodada de barganhas no período $t + 1$, tanto firmas como sindicatos avaliam os desempenhos passados de suas estratégias (propostas salariais) e buscam ajustá-las de maneira a se adaptarem ao ambiente macroeconômico, fruto de suas próprias escolhas descentralizadas passadas.

No presente trabalho, as reavaliações e escolhas individuais periódicas das estratégias de barganha buscando adaptação ao ambiente macroeconômico, que co-evolui com estas tomadas de decisões recorrentes, serão representadas como um *mecanismo de aprendizado por reforço* (*reinforcement learning mechanism*). Nesse tipo de processo adaptativo, como destacam Roth & Erev (1995, p. 165), cada tomador de decisão aumenta as probabilidades de escolher estratégias que apresentaram um melhor desempenho passado. Em outras palavras, a chance de uma estratégia ser escolhida é reforçada se ela

¹¹Barganha (j, t) com $A_j(t) \neq \emptyset$.

¹²Um número escolhido com base em uma distribuição de probabilidades uniforme.

¹³Naturalmente, numa barganha (j, t) viável, a probabilidade do resultado $w_j(t)$ encontrar-se em $A_j^i(t)$ é, simplesmente, $1 - g(v(t))$.

¹⁴Tecnicamente, o ínfimo do conjunto $A_j^s(t)$.

¹⁵Tecnicamente, o supremo do conjunto $A_j^s(t)$.

apresenta resultados passados favoráveis e enfraquecida caso contrário.¹⁶

Como destaca Roth & Erev (1995, p. 171-172), os modelos de aprendizado por reforço são consistentes com regularidades empíricas encontradas pela psicologia experimental. Estudos desta área têm encontrado duas propriedades robustas no processo de aprendizagem humana, a saber, a *lei do efeito* (*law of effect*), escolhas que tem levado a bons resultados no passado são mais prováveis de serem repetidas no futuro, e a *lei de potência da prática* (*power law of practice*), o aprendizado ocorre a taxas crescentes inicialmente e depois de um determinado momento se dá a taxas decrescentes. Outro princípio psicológico implícito na lei do efeito, como salienta Roth & Erev (1998, p. 859), é de que o comportamento de escolha dos indivíduos é probabilístico.

Roth & Erev (1995) e Erev & Roth (1998) focalizaram o aprendizado individual em ambientes de interação estratégica com múltiplos tomadores de decisões, ou seja, em jogos com múltiplos jogadores. Os referidos autores argumentam que neste tipo de ambiente as leis do efeito e de potência da prática não explicam suficientemente bem a sensibilidade (*responsiveness*) observada dos tomadores de decisão aos outros tomadores de decisão presentes no ambiente de interação. Sendo assim, Erev & Roth propuseram dois princípios adicionais de aprendizado que ajudam a captar a citada sensibilidade, a saber, o *efeito recentidade* (*recency effect* ou *forgetting effect*) e o *efeito experimentação* (*experimentation effect* ou *generalization effect*). O primeiro efeito diz respeito a maior importância das experiências recentes sobre a tomada de decisão individual do que as experiências vividas num passado mais distante, podendo ser visto como resultado da interação entre as duas leis supracitadas (cf. Erev & Roth, 1998, p. 863). O segundo efeito destaca que, não só as escolhas que têm levado a bons resultados no passado são mais prováveis de serem repetidas no futuro, mas também escolhas parecidas serão feitas mais frequentemente. Esse efeito evita que os tomadores de decisão fiquem presos a uma escolha em detrimento das outras (cf. Erev & Roth, 1998, p. 863).

O algoritmo de Roth e Erev, cuja versão modificada por Nicolaisen, Petrov & Tesfatsion (2001) aplicaremos a seguir, incorpora em algum grau as quatro regularidades comportamentais anteriormente descritas. Passar-se-á a descrição propriamente dita do algoritmo de Roth e Erev modificado usado no modelo computacional baseado em agentes aqui proposto.

Em $t = 1$, antes de qualquer experiência ser adquirida, cada sindicato j associa a sua demanda salarial m , dada por $w_{j,m}^d(1) = \frac{(m-1)a(1)}{M-1}$, a mesma *propensão de escolha*, dada por $q_{j,m}^s(1) = \frac{S(1)\bar{w}}{M-1}$, na qual $\bar{w} = \frac{a(1)}{2}$ é o salário real médio em $t = 1$ e $S(1)$ é a *intensidade* (*strength*) das propensões de escolha iniciais.¹⁷ Analogamente, em $t = 1$ cada firma j associa a cada oferta salarial m , dada por $w_{j,m}^o(1) = \frac{(m-1)a(1)}{M-1}$, a mesma propensão de escolha, dada por $q_{j,m}^f(1) = \frac{S(1)\bar{p}}{M-1}$, na qual $\bar{p} = \frac{1}{2\sigma}$ é a taxa de lucro média¹⁸ em $t = 1$. Ademais, cada sindicato j associa a mesma *probabilidade de escolha* a cada uma de suas demandas salariais possíveis m , dada por $p_{j,m}^s(1) = \frac{1}{M-1}$, e cada firma j associa a mesma probabilidade de escolha a cada uma de suas ofertas salariais possíveis m , dada por $p_{j,m}^f(1) = \frac{1}{M-1}$.

¹⁶Cabe salientar, que a escolha de um modelo de aprendizado por reforço implica a adoção da hipótese de racionalidade limitada e foco sobre o processo de ajustamento fora de (e não necessariamente em direção a um) equilíbrio. Em outros termos, descarta-se, *a priori*, a hipótese de que os indivíduos envolvidos numa situação de interação estratégica são dotados de racionalidade plena (perfeita) e, conseqüentemente, alcançam instantaneamente um estado de equilíbrio.

¹⁷Como explica Roth & Erev (1995, p. 176), se $S(1)$ é alto as propensões de escolha iniciais são fortes e, portanto, o aprendizado será mais lento. Por sua vez, quando $S(1)$ é baixo o aprendizado será mais rápido, pois as propensões de escolha iniciais são mais fracas.

¹⁸Obtida, fazendo $w_j(1) = \bar{w} = \frac{a(1)}{2}$ e substituindo em (18).

No início do período $t = 1$, antes da produção ser realizada, firmas e respectivos sindicatos entram em um processo de barganha salarial. O sindicato j apresenta sua demanda salarial $w_{j,m'}^d(1)$ e os gestores da firma j apresentam sua oferta salarial $w_{j,m''}^o(1)$. Ambas as propostas são escolhidas aleatoriamente a partir das probabilidades de escolha definidas no parágrafo anterior. Em cada barganha $(j, 1)$, se $w_{1,m'}^d(1) > w_{j,m''}^o(1)$ não haverá acordo salarial possível, de maneira que a produção não se realiza e, portanto, tanto a firma quanto o sindicato acabam com uma recompensa nula. Todavia, se $w_{j,m'}^d(1) \geq w_{j,m''}^o(1)$ o fechamento de um acordo salarial torna-se factível. Do processo de barganha, detalhado na subseção 3.2, surge o resultado $w_j(1)$. Assim, desse acordo salarial e da quantidade empregada de trabalho (20) determina-se a recompensa do sindicato j por (22), a saber, $R_{j,m'}^s(1) = \frac{L_j(1)w_j(1)}{N_j(1)}$. Por sua vez, também com base no resultado $w_j(1)$, determina-se a recompensa da j -ésima firma por (18), a saber, $R_{j,m''}^f(1) = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{w_j(1)}{a(1)} \right]$.

Suponha-se agora que o sistema econômico se encontre no início do período $t > 1$. Cada sindicato j atualiza sua propensão de escolha $q_{j,m}^s(t)$ com base nas recompensas obtidas no período anterior como segue:

$$q_{j,m}^s(t) = (1 - \phi)q_{j,m}^s(t-1) + E^s(j, m, m', M, \varepsilon, t-1), \quad (30)$$

e cada firma j atualiza de maneira similar sua propensão de escolha $q_{j,m}^f(t)$, a saber:

$$q_{j,m}^f(t) = (1 - \phi)q_{j,m}^f(t-1) + E^f(j, m, m'', M, \varepsilon, t-1), \quad (31)$$

sendo ϕ o parâmetro de recentidade (ou esquecimento), ε o parâmetro de experimentação (ou generalização), $E^s(\cdot)$ e $E^f(\cdot)$ as funções que atualizam as propensões de escolha, calculadas com base na experiência adquirida nas barganhas salariais passadas.

O parâmetro de recentidade ϕ reduz a importância das experiências passadas, de maneira que quanto maior o valor deste parâmetro maior o impacto da experiência recente *vis-à-vis* às experiências passadas.

A função de atualização do j -ésimo sindicato, seguindo Roth & Erev (1995), pode ser definida como segue:

$$E^s(j, m, m', M, \varepsilon, t-1) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) R_{j,m'}^s(t-1), & \text{se } m = m', \\ \frac{\varepsilon}{M-2} R_{j,m'}^s(t-1), & \text{se } m \neq m'. \end{cases} \quad (32)$$

Analogamente, a função de atualização da j -ésima firma pode ser expressa como:

$$E^f(j, m, m'', M, \varepsilon, t-1) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) R_{j,m''}^f(t-1), & \text{se } m = m'', \\ \frac{\varepsilon}{M-2} R_{j,m''}^f(t-1), & \text{se } m \neq m''. \end{cases} \quad (33)$$

Como se vê, a propensão de escolha da proposta salarial m de um agente é reforçada ou enfraquecida com base na recompensa obtida no período anterior, embora alguma propensão a experimentar entre as demais propostas seja mantida. Logo, as funções de atualização (32) e (33) formalizam o efeito experimentação.

A partir das propensões de escolha atualizadas (30) e (31) as probabilidades de escolha dos agentes são atualizadas da seguinte maneira:

$$p_{j,m}^\ell(t) = \frac{q_{j,m}^\ell(t)}{\sum_{h=1}^{M-1} q_{j,h}^\ell(t)}, \text{ com } \ell = s, f. \quad (34)$$

Todavia, como observam Nicolaisen, Petrov & Tesfatsion (2001, p. 507-508), a forma funcional das funções de atualização utilizada em Roth & Erev (1995) e Erev & Roth (1998) apresenta dois inconvenientes. O primeiro, é o problema da degeneração de parâmetro (*parameter degeneracy*). Esse problema ocorre quando o valor do parâmetro ε tende a $\frac{M-2}{M-1}$, o que faz com que as probabilidades de escolha sejam atualizadas cada vez mais lentamente, não sendo de fato atualizadas quando $\varepsilon = \frac{M-2}{M-1}$, pois neste caso $1 - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{M-2} = \frac{1}{M-1}$. O segundo problema diz respeito à possibilidade de ocorrência de recompensa nula. Se isto ocorre, as probabilidades de escolha (34) não mudam, pois as propensões de escolha (30)-(31) são reduzidas na mesma proporção $1 - \phi$.

Nicolaisen, Petrov & Tesfatsion (2001, p. 507-508) sugerem uma versão modificada da função de atualização do algoritmo de aprendizado por reforço de Roth e Erev com três parâmetros. Esses autores argumentam que a versão que sugerem ainda se mantém consistente com os princípios incorporados no algoritmo original de Roth e Erev. Usando a sugestão de Nicolaisen, Petrov e Tesfatsion, as funções de atualização de sindicatos e firmas passam a ser:

$$E^s(j, m, m', M, \varepsilon, t - 1) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) R_{j,m'}^s(t - 1), & \text{se } m = m', \\ \frac{\varepsilon}{M-2} q_{j,m'}^s(t - 1), & \text{se } m \neq m', \end{cases} \quad (35)$$

$$E^f(j, m, m'', M, \varepsilon, t - 1) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) R_{j,m''}^f(t - 1), & \text{se } m = m'', \\ \frac{\varepsilon}{M-2} q_{j,m''}^f(t - 1), & \text{se } m \neq m''. \end{cases} \quad (36)$$

Com esta forma funcional das funções de atualização, o problema da degeneração de parâmetros não ocorre, pois embora $1 - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{M-2} = \frac{1}{M-1}$ quando $\varepsilon = \frac{M-2}{M-1}$, só a proposta salarial selecionada no período anterior terá sua propensão reforçada/enfraquecida pela respectiva recompensa, enquanto as demais serão corrigidas a partir do parâmetro de recentidade ajustado $\phi^* = \phi - \frac{\varepsilon}{M-2}$, que assume o valor $\phi^* = \phi - \frac{1}{M-1}$ quando $\varepsilon = \frac{M-2}{M-1}$. Por sua vez, o problema da nulidade da recompensa também é resolvido. Com efeito, se a proposta selecionada m' ou m'' gera uma recompensa nula, então sua propensão no próximo período será reduzida à proporção $1 - \phi$ da propensão atual, enquanto as demais propostas serão reduzidas a proporção $1 - \phi^*$ das respectivas propensões atuais. Como $1 - \phi^* > 1 - \phi$, as probabilidades de escolha das propostas não selecionadas aumentam relativamente a probabilidade de escolha da proposta selecionada, induzindo o tomador de decisão a se afastar da proposta que gerou recompensa nula.

Por outro lado, se a proposta selecionada m' ou m'' gera uma recompensa estritamente positiva, segue que sua propensão de escolha no próximo período tende a ser ampliada, pois o reforço da recompensa estritamente positivo, descontado o efeito experimentação, tende a superar o maior fator de contração $1 - \phi$.

3.4 Propriedades macroeconômicas emergentes

Na presente subseção apresenta-se algumas propriedades macroeconômicas do modelo delineado nas três subseções anteriores, obtidas a partir de várias simulações computacionais. Todas as simulações apresentadas nesta seção rodaram 6000 períodos (passos de simulação). O número de firmas, igual ao número de sindicatos, foi fixado em $F = 500$. Firmas e sindicatos foram emparelhados aleatoriamente. Trabalhou-se com uma razão capital-produto $\sigma = 2,5$. A produtividade média do trabalho no primeiro período foi normalizada em $a(1) = 1$, fixando-se sua taxa de crescimento igual à taxa de crescimento da população, dadas por $\alpha = \beta = 0,01$. Os parâmetros da função sigmóide foram fixados em $\lambda = 10$ e $\mu = 0,5$. Finalmente, com relação ao algoritmo de aprendizado, estabeleceu-se $M = 100$, $S(1) = 1$, $\phi = 0,1$ e $\varepsilon = 0,05$. Esse conjunto de valores foi tomado como referência nas simulações que seguem, exceto quando explicitamente especificados outros valores.

O estado macroeconômico pode ser sintetizado por meio das duas variáveis macroeconômicas chaves do modelo original de Goodwin, a saber, a taxa de emprego, definida em (26), e a participação do salário na renda (razão massa de salários-produção agregada), dada por:

$$u(t) = \frac{\sum_{j=1}^F w_j(t)L_j(t)}{\sum_{j=1}^F Y_j(t)}. \quad (37)$$

Nas Figuras 4 e 5 encontram-se as trajetórias dessas variáveis macroeconômicas para os 200 últimos períodos de uma simulação computacional. Como no modelo de Goodwin (1967), essas variáveis macroeconômicas oscilam em torno de médias constantes, ou seja, as séries geradas não apresentam tendência descendente ou ascendente.

Outra propriedade emergente digna de nota é a limitação da amplitude das flutuações da taxa de emprego e da participação do salário na renda em intervalos economicamente significativos. Como salientado no final da seção 2, as trajetórias geradas pelo modelo de Goodwin(1967), dependendo das condições iniciais e/ou dos valores dos parâmetros do modelo, podem assumir valores maiores que um durante certas fases de um ciclo. No modelo computacional baseado em agentes aqui desenvolvido, embora o conjunto de propostas possíveis, definido em (25), inclua as possibilidades dos agentes proporem um salário nulo (todo o produto para a firma) ou igual à produtividade média do trabalho (todo o produto para o sindicato), elas não se tornam predominantes em qualquer uma das populações de agentes. Disto, pode-se inferir que a função sigmóide capta melhor, comparado à função barganha de Goodwin, o papel do exército industrial de reserva como mecanismo homeostático, que evita que o sistema econômico atinja valores extremos da taxa de emprego e da participação do salário na renda.

No que segue, verificar-se-á se os resultados originais do modelo de Goodwin (1967) relativos às médias da participação dos salários na renda e da taxa de emprego, expostos no final da seção 2, são gerados como regularidades macroeconômicas emergentes do modelo computacional baseado em agentes. Para realizar tais averiguações, serão alterados os valores dos parâmetros e analisados os impactos dessas variações sobre as médias e os desvios padrão dos valores das variáveis macroeconômicas, calculadas com base nos 1000 últimos períodos de simulações com um total de 6000 períodos.

Para cada parâmetro escolhido, determinou-se o menor e o maior valor que este poderia assumir. Em seguida, pegou-se 100 valores (pontos) equidistantes, incluindo os citados valores extremos. Por

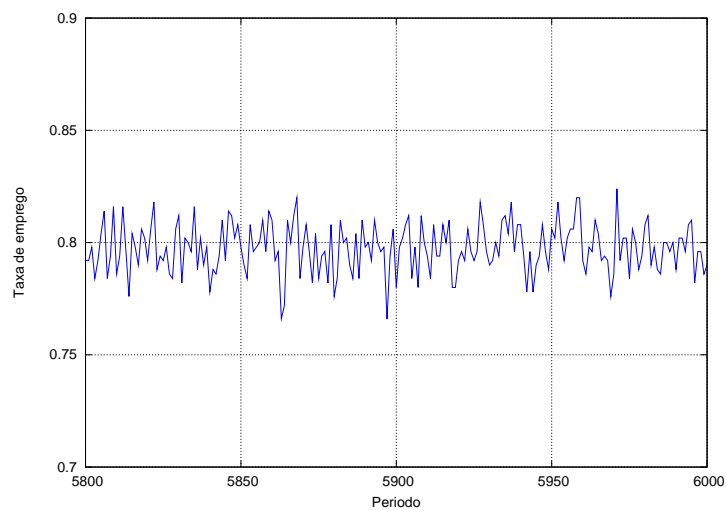


Figura 4: *Trajétória da taxa de emprego.*

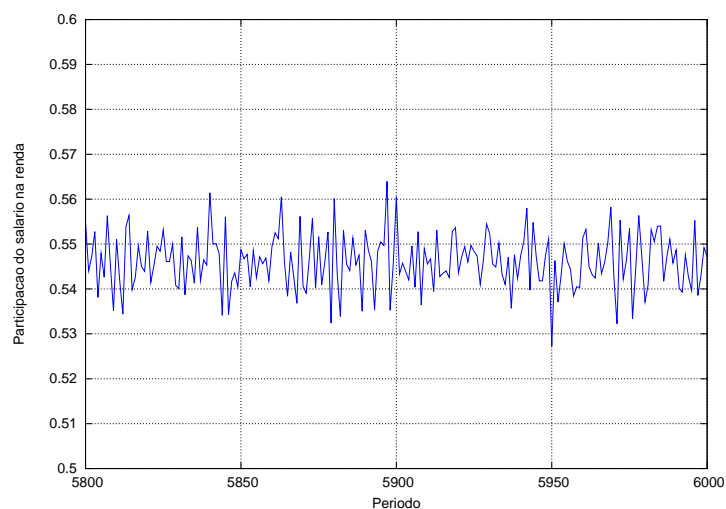


Figura 5: *Trajétória da participação do salário na renda.*

exemplo, o primeiro exercício de dinâmica comparativa que foi feito, consistiu da análise da sensibilidade das médias e desvios padrão das variáveis macroeconômicas com relação à taxa de emprego inicial do sistema econômico, que determina completamente seu estado inicial. Tomou-se 0,01 como o menor valor possível dessa variável e 1 como o maior valor possível. Logo, a taxa de emprego inicial assumiu os seguintes cem valores: $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \dots, \frac{99}{100}, 1$. A partir daí, as Figuras 6 e 7 foram geradas com base em 100 simulações de 6000 períodos cada uma. Para os demais parâmetros o mesmo procedimento foi adotado. Como o total de parâmetros estudados é oito, realizou-se um total de 800 simulações computacionais de 6000 períodos cada uma.

Como se vê na Figura 6 e 7, variações da taxa de emprego inicial só afetam levemente as médias da taxa de emprego e da participação dos salários na renda, em torno das quais o sistema oscila. As

linhas verticais (em vermelho), que aparecem em todas as figuras daqui em diante, indicam o desvio padrão em torno de cada média, ou seja, o comprimento de cada linha desta é igual a dois desvios padrão. Como se observa nas referidas figuras, os desvio padrão mantêm-se numa mesma ordem de grandeza, o que significa que as flutuações em torno da média não dependem da condição inicial da taxa de emprego.

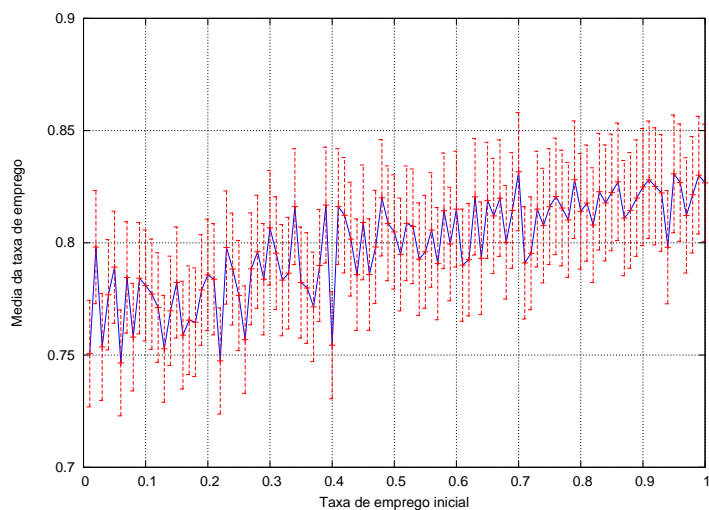


Figura 6: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função da condição inicial.

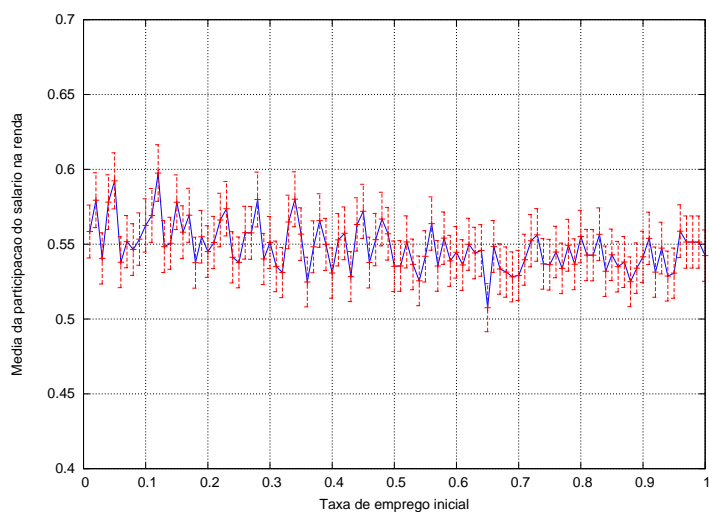


Figura 7: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função da condição inicial.

Como visto no final da seção 2, o modelo de Goodwin (1967) prediz que a média da taxa de emprego é negativamente relacionada à sensibilidade do salário real na vizinhança do pleno emprego e a média da participação dos salários na renda não deveria ser impactada pelos parâmetros da barganha. Uma forma de avaliar essas propriedades no modelo computacional baseado em agentes aqui proposto é analisar o impacto dos parâmetros da função sigmóide sobre os valores médios das variáveis macroeconômicas. As Figuras 8 e 9 apresentam as médias dessas variáveis quando o parâmetro λ varia. Um maior λ implica numa maior curvatura da função sigmóide, que representa economicamente uma maior probabilidade de resultados de barganha favoráveis aos sindicatos para cada taxa de emprego maior que $\frac{1}{2}$, que é o ponto de inflexão da função sigmóide. Assim, como era de se esperar, λ 's maiores implicam menores médias da taxa de emprego. Por outro lado, só para valores de λ em torno e acima de 10 é que não se observou, como prediz o modelo de Goodwin, impactos com viés sobre a média da participação dos salários na renda.

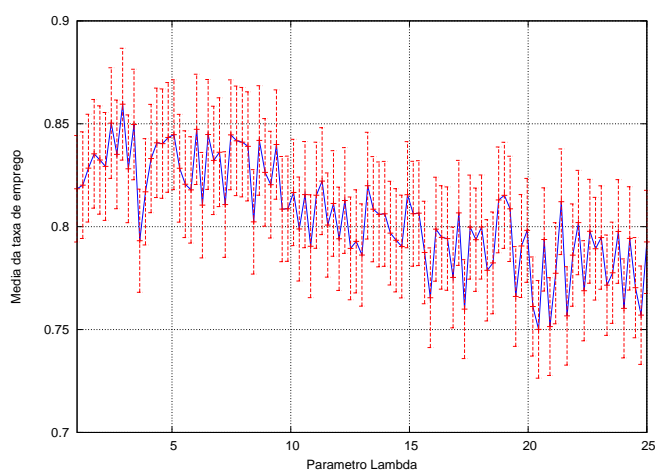


Figura 8: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função do parâmetro λ .

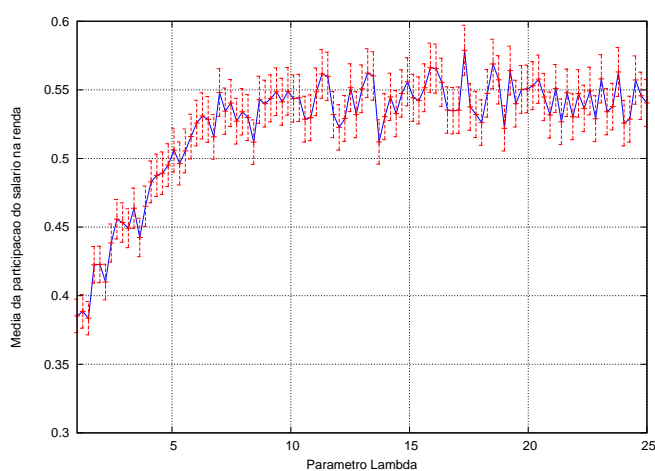


Figura 9: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função do parâmetro λ .

As Figuras 10 e 11 apresentam as médias da participação do salário na renda e da taxa de emprego da economia em função do parâmetro μ . Aumentos desse parâmetro tornam menor o intervalo dos valores da taxa de emprego próximos ao pleno emprego, no qual a probabilidade de aceitação de propostas salariais favoráveis aos trabalhadores é maior que a respectiva probabilidade de aceitação de propostas favoráveis às firmas. Logo, como era de se esperar, a média da participação do salário na renda tende a diminuir com o aumento de μ . Com respeito à taxa de emprego, o parâmetro μ não afeta sua média em uma direção bem determinada.

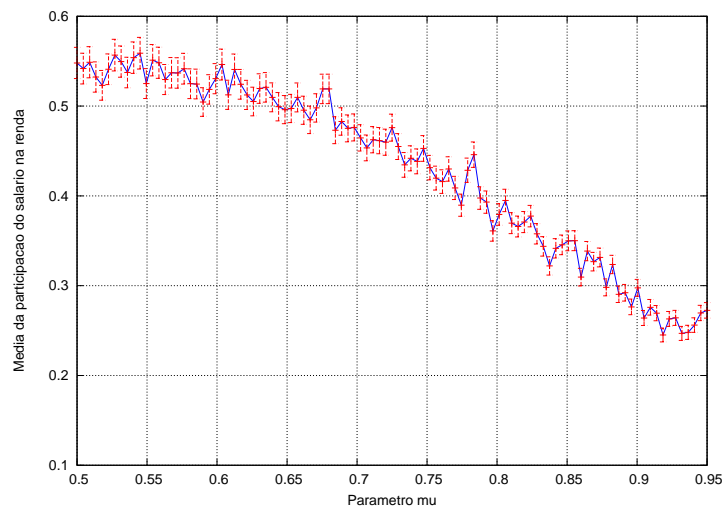


Figura 10: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função de μ .

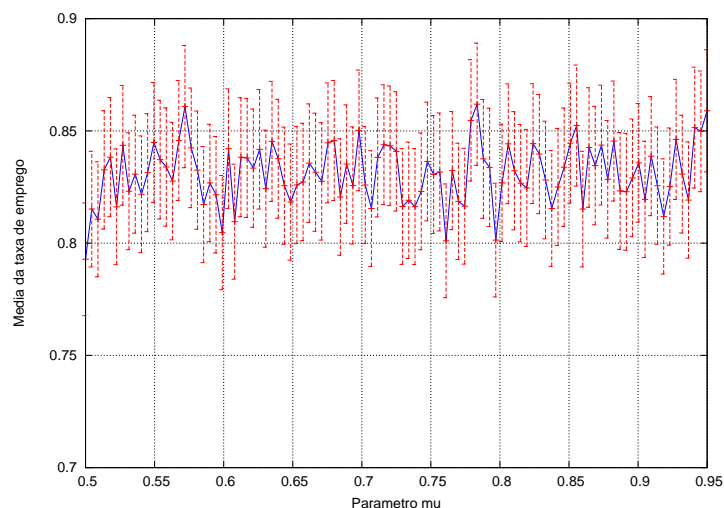


Figura 11: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função de μ .

Como prediz o modelo de Goodwin (1967), na Figura 12 vê-se que há uma tendência de redução da média da participação do salário na renda quando a taxa de crescimento populacional aumenta.

Todavia, como apresentado na Figura 13, a média da taxa de emprego é afetada pela taxa de crescimento populacional, padrão emergente que está em desacordo com o modelo de Goodwin (1967). Todavia, como destaca Blatt (1983, p. 215), essa propriedade do modelo de Goodwin deve ser cuidadosamente interpretada, pois esta desaparece quando é relaxada a suposição de linearidade da função barganha.¹⁹

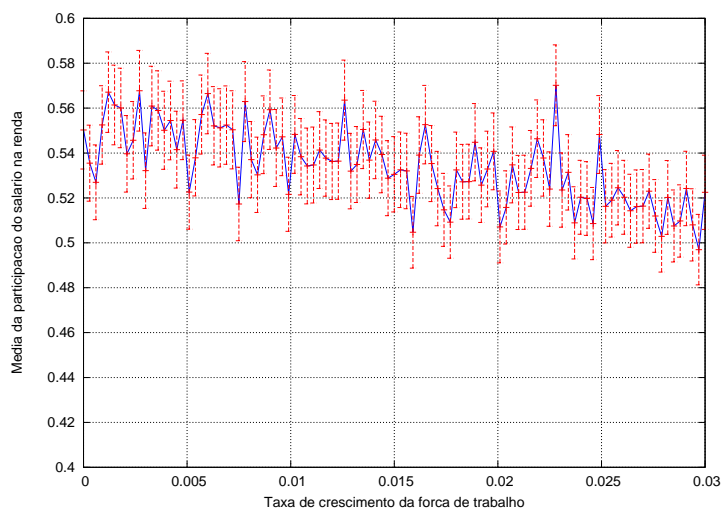


Figura 12: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função da taxa de crescimento da população.

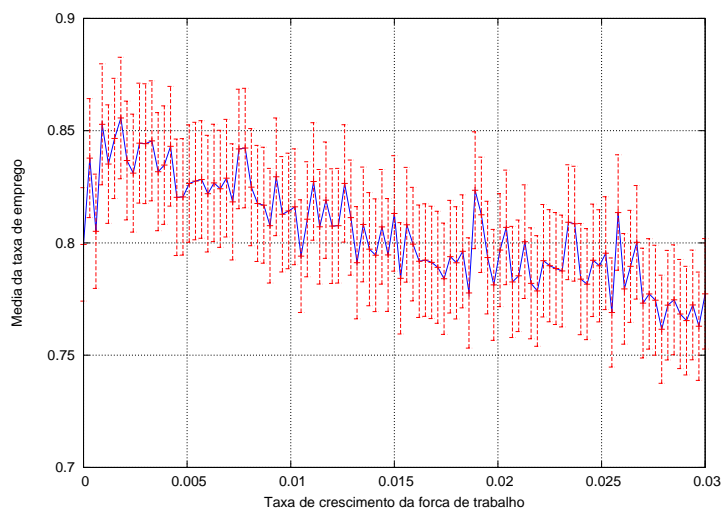


Figura 13: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função da taxa de crescimento da população.

¹⁹Com uma função barganha $f(v)$ não-linear qualquer, Blatt (1983, p. 215) mostra que é o valor médio da taxa de crescimento do salário real que independe das condições iniciais, e não a taxa de emprego em si.

As Figuras 14 e 15 apresentam as médias da participação do salário na renda e da taxa de emprego da economia em função da taxa de progresso técnico. Como prediz o modelo de Goodwin (1967), aumentos dessa taxa tendem a diminuir a média da participação do salário na renda. Todavia, no que diz respeito à média da taxa de emprego, o modelo computacional mostra o efeito inverso ao previsto por Goodwin. Entretanto, a relação positiva entre a média da taxa de emprego e a taxa de progresso técnico inferida do modelo de Goodwin é, também, resultado direto da suposição de linearidade da função barganha (vide Blatt, 1983, p. 215).

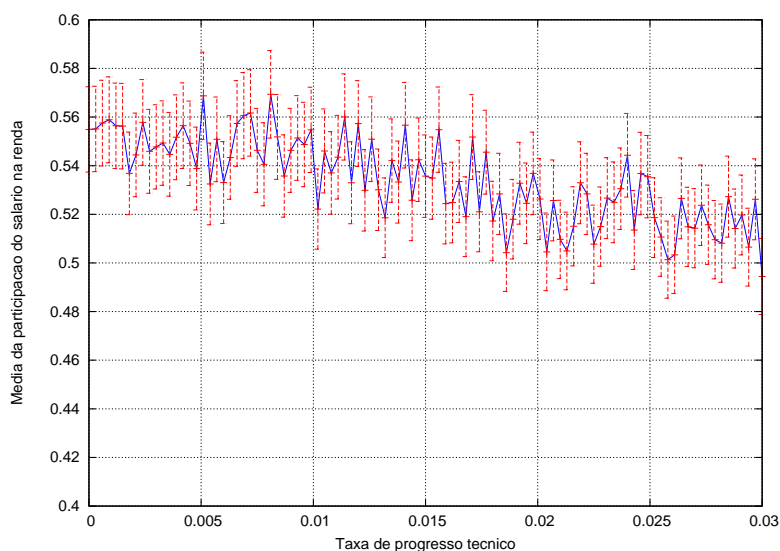


Figura 14: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função da taxa de progresso técnico.

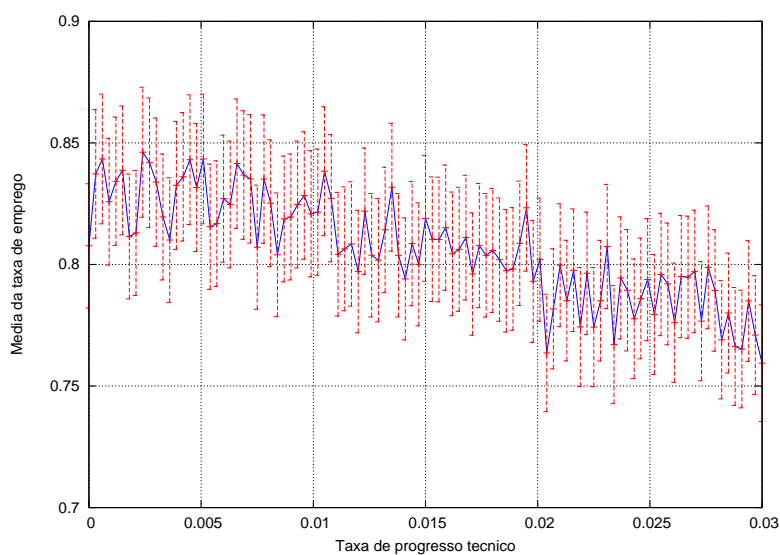


Figura 15: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função da taxa de crescimento da taxa de progresso técnico.

As Figuras 16 e 17 trazem os impactos de variações da razão produto-capital. De acordo com o modelo de Goodwin, o valor da média da participação do salário na renda deve cair quando ocorre elevações da razão capital-produto, tendência essa que não aparece claramente nas simulações computacionais realizadas. Nota-se, ainda, que a média da taxa de emprego também não apresenta uma tendência na metade inferior da amostra de valores de σ . Isso está de acordo com o modelo de Goodwin, pois nesse a média da taxa de emprego independe da razão produto-capital.

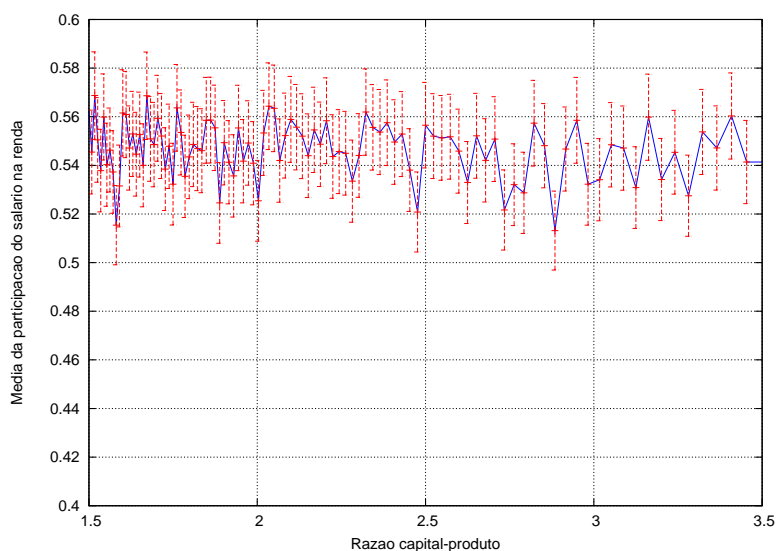


Figura 16: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função da razão capital-produto.

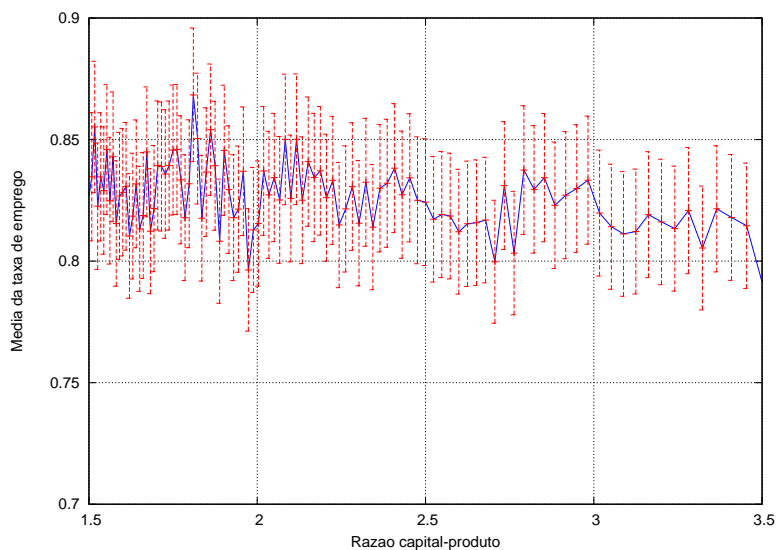


Figura 17: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função da razão capital-produto.

Finalizando-se a presente subseção, verificar-se-á se as propriedades emergentes do modelo com-

putacional se mostraram robustas com respeito aos parâmetros do algoritmo de aprendizagem por reforço. Com relação ao parâmetro de experimentação ϵ , as Figuras 18 e 19 mostram que nem a média nem o desvio padrão de cada variável macroeconômica apresentam uma tendência ascendente ou descendente quando o citado parâmetro aumenta.

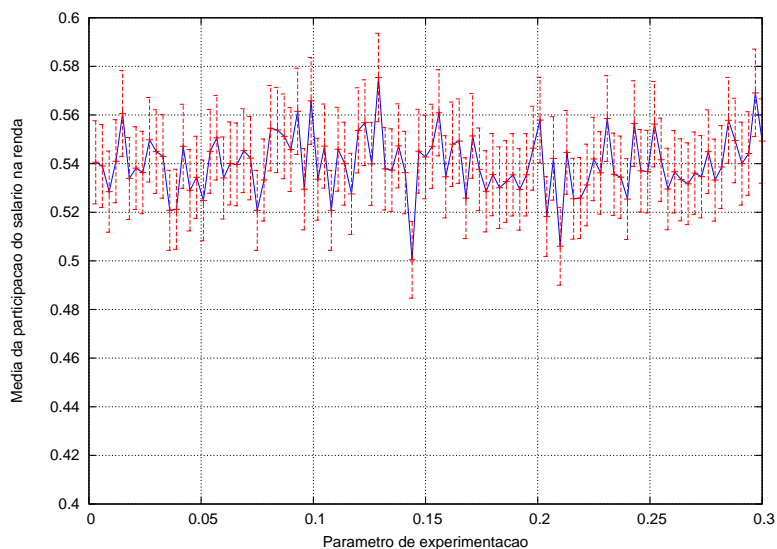


Figura 18: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função do parâmetro de experimentação.

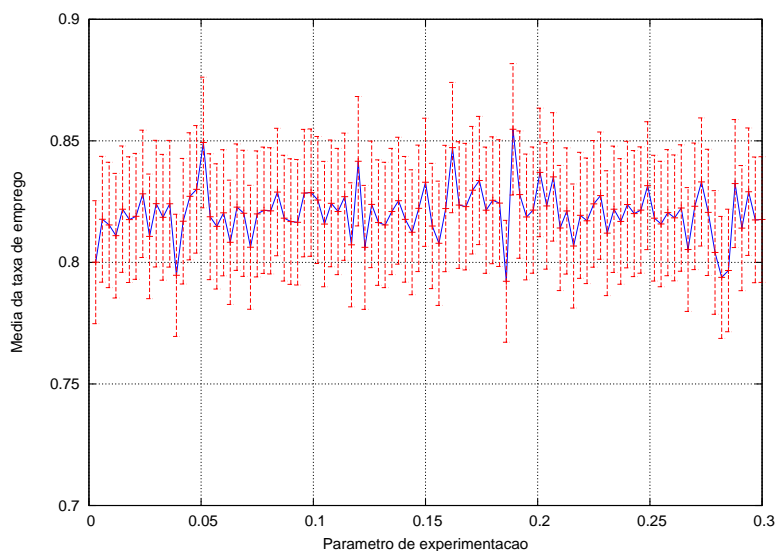


Figura 19: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função do parâmetro de experimentação.

O mesmo não ocorre com respeito ao parâmetro de recentidade ϕ . Como exposto nas Figuras 20 e 21, quando firmas e sindicatos revisam suas propostas salariais levando em consideração o desempenho das suas propostas mais recentes, ou seja, quando o parâmetro de recentidade aumenta, há uma redução

da taxa de emprego e uma expansão da participação do salário na renda. Uma explicação possível para estes efeitos é a de que uma maior importância relativa ao estado recente da economia acelera a reação dos agentes, principalmente nas fases de expansão, o que por sua vez gera fases mais curta de acumulação acelerada de capital.

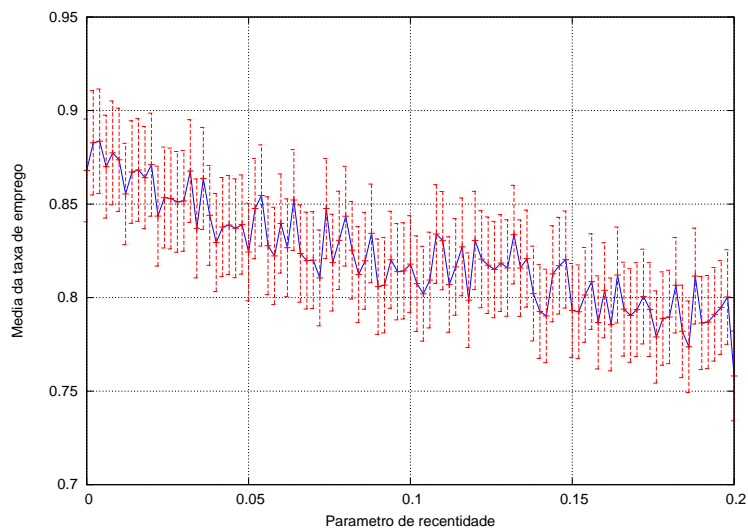


Figura 20: Média e desvio padrão da taxa de emprego em função do parâmetro de recentidade.

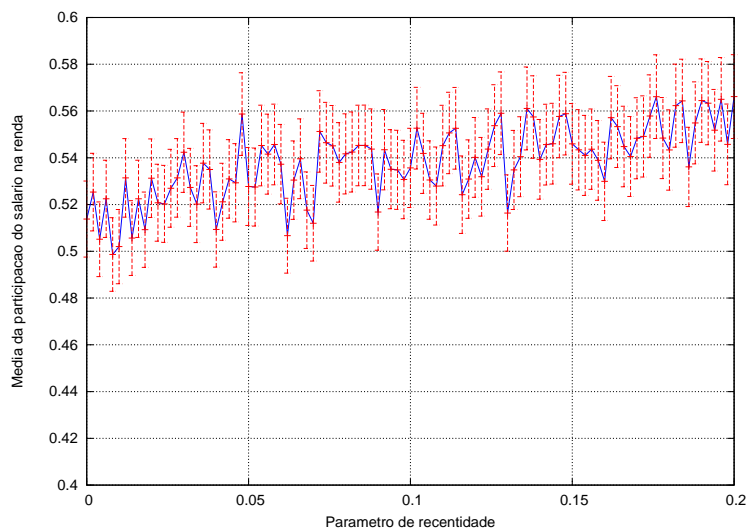


Figura 21: Média e desvio padrão da participação do salário na renda em função do parâmetro de recentidade.

4 Considerações Finais

No presente trabalho apresentou-se uma versão computacional baseada em agentes do modelo seminal de Goodwin (1967). Com esse modelo foi possível estudar a interação entre distribuição de renda e acumulação de capital em uma economia com barganhas salariais descentralizadas.

Essas barganhas foram formalizadas como leilões duplos entre F pares de firmas e sindicatos de trabalhadores. Como em Goodwin (1967), cada acordo salarial observado em cada barganha foi parametrizado pela taxa de emprego da economia, inversamente relacionada ao exército industrial de reserva dessa economia. Todavia, diferentemente de Goodwin, que formalizou a relação positiva entre a taxa de crescimento do salário real e a taxa de emprego com uma equação diferencial ordinária (função barganha), no modelo computacional baseado em agentes a formalização goodwiniana foi substituída por um algoritmo computacional. Nesse algoritmo, os salários acordados entre pares de firmas e sindicatos de trabalhadores serão em média maiores quanto maior for a taxa de emprego da economia, que emerge como resultado de escolhas individuais feitas por $2F$ agentes, sem qualquer tipo de coordenação central.

Com base no desempenho passado das propostas salariais escolhidas, firmas e sindicatos de trabalhadores decidem, sem coordenação supra individual, as propostas salariais presentes, buscando se adaptarem ao ambiente macroeconômico, que co-evolui com estas tomadas de decisões descentralizadas recorrentes. Esse processo adaptativo de cada agente foi representado como um mecanismo de aprendizado por reforço (*reinforcement learning mechanism*). O uso do citado mecanismo, tem como implicação a adoção da hipótese de racionalidade limitada e o foco sobre o processo de ajustamento fora de (e não necessariamente em direção a um) equilíbrio. Portanto, não se partiu do pressuposto de que os indivíduos envolvidos na situação de interação estratégica anteriormente delineada são dotados de racionalidade plena (perfeita) e, conseqüentemente, alcançam instantaneamente um estado de equilíbrio. Mesmo assim, as simulações realizadas apresentaram padrões agregados emergentes.

O modelo computacional gerou séries agregadas que oscilam em torno de médias constantes, ou seja, não apresentam tendência descendente ou ascendente. Outra propriedade emergente apresentada foi a limitação da amplitude das flutuações da participação dos salários na renda e da taxa de emprego em intervalos economicamente significativos.

O modelo computacional baseado em agentes gerou regularidades macroeconômicas emergentes da média da participação dos salários na renda compatíveis com o respectivo comportamento deduzido no modelo original de Goodwin (1967). Todavia, para a média da taxa de emprego alguns resultados diferentes emergiram das simulações computacionais. Como os resultados referentes ao comportamento da média da taxa de emprego estão condicionados à aproximação linear tomada por Goodwin da função barganha, pode-se atribuir tais diferenças em parte a essa premissa de linearidade do modelo original.

As propriedades emergentes em termos de médias da participação dos salários na renda e da taxa de emprego se mostraram robustas com relação ao parâmetro de experimentação do mecanismo de aprendizado por reforço, apresentando impactos intuitivamente esperados em relação ao parâmetro de recentidade.

Obviamente, as simulações realizadas não esgotam as propriedades emergentes que podem ser detectadas por simulações do modelo computacional baseado em agentes aqui proposto. Portanto, um

estudo mais aprofundado faz-se necessário. Extensões do modelo computacional aqui desenvolvido são possíveis, entre elas a inclusão da possibilidade de incorporação do processo de concorrência entre capitais e entre trabalhadores via migração, bem como a inclusão do princípio da demanda efetiva, relaxando a hipótese de que toda massa de lucro é sempre convertida em investimento.

Referências bibliográficas

- BLATT, J. M. *Dynamic economic systems: a post-keynesian approach*. New York: M. E. Sharpe, 1983.
- DORE, Mohammed H. I. *The macrodynamics of business cycles: a comparative evaluation*. Cambridge: Blackwell, 1993.
- EREV, I.; ROTH, A. E. Predicting how people play games: reinforcement learning in experimental games with unique, mixed strategy equilibria. *The American Economic Review*, v. 88, n. 4, p. 848-881, 1998.
- GABISCH, G., LORENZ, H. W. *Business cycle theory: a survey of methods and concepts*. 2. ed. New York : Springer-Verlag, 1989.
- GANDOLFO, G. *Economic dynamics: methods and models*. Amsterdam: North-Holland, 1996.
- GOODWIN, R. M. A growth cycle. In: FEINSTEIN, C. H. (Ed.). *Socialism, capitalism and economic growth: essays presented to Maurice Dobb*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967.
- GOODWIN, R. M., KRÜGER, M., VERCELLI, A. (ed.). *Nonlinear models of fluctuating growth*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. (Lecture notes in economics and mathematical systems, n. 228).
- GOODWIN, R. M.; PUNZO, L. F. *The dynamics of a capitalism economy: a multi-sectoral approach*. Cambridge: Polity Press, 1987.
- FOLEY, D. K., MICHL, T. R. *Growth and distribution*. Cambridge: Harvard University Press, 1999.
- FREITAS, G. G. *Economia e sistemas complexos: interações sociais, dinâmicas emergentes e uma análise da difusão da internet na cidade de São Paulo*. São Paulo: IPE-FEA-USP, 2006. (Tese de Doutorado).
- NICOLAISEN, J.; PETROV, V.; TEFATSION, L. Market power and efficiency in a computational electricity market with discriminatory double-auction pricing. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 5, n. 5, p. 504-523, 2001.
- ROTH, A. E.; EREV, I. Learning in extensive form games: experimental data and simple dynamic models in the intermediate run. *Games and Economic Behavior*, v. 8, n. 1, p. 164-212, 1995.
- ROSINGER, J. *Dinâmica multissetorial e flutuações: a abordagem de Richard Goodwin*. Brasília: UnB, 2001. (Texto para Discussão, Programa de Seminários Acadêmicos, Seminário no 7, Departamento de Economia).
- SATO, Y. Marx-Goodwin Growth cycles in a two-sector economy, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, v. 45, n. 1, p. 21-39, 1985.
- SILVEIRA, J. J. *Ciclos goodwinianos e o processo de concorrência num ambiente de racionalidade limitada: uma análise a partir da teoria dos jogos evolucionários*. 2001. Tese (Doutorado) - Instituto de Pesquisas Econômicas, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- SILVERBERG, G. Embodied technical progress in a dynamical economic model: The self-organization paradigm. In: GOODWIN, R. M., KRÜGER, M., VERCELLI, A. (ed.). *Nonlinear models of fluctuating growth*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. p. 192-208. (Lecture notes in economics and mathematical systems, n. 228).
- SKOTT, P. *Conflict and effective demand in economic growth*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- TEFATSION, L.; JUDD, K. L. (eds.) *Handbook of computational economics: agent-based computational economics*. Netherlands: North-Holland, 2006. (Handbooks in Economics series, v. 2).
- VELUPILLAI, K. (ed.) *Nonlinear and multisectoral macrodynamics: essays in honour of Richard Goodwin*. London: MacMillan, 1990.