

TEXTO PARA DISCUSSÃO



**Planos de Fase e Teoria
Econômica**

João Rogério Sanson

Nº 01/2005

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SÓCIO-ECONÔMICO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
Campus Universitário – Trindade
CEP 88049-970 – Florianópolis – Santa Catarina
Tel.: (48) 331.9458 – Fax.: (48) 331.9776**

Planos de Fase e Teoria Econômica

*João Rogério Sanson**

CPGE - UFSC

End.eletr.: jrsanson@mbox1.ufsc.br

Resumo

Apresenta-se a construção do plano de fase do ponto de vista da teoria econômica. Inicialmente, ilustra-se graficamente a estabilidade para uma única equação diferencial linear. Em seguida, usa-se uma técnica gráfica comum em Economia, que é a dos quatro gráficos justapostos, para construir curvas com o comportamento temporal das variáveis de um modelo de duas equações diferenciais. Como passo seguinte, apresenta-se a técnica do plano de fase na forma de passos práticos, tanto para sistemas específicos de equações diferenciais como para alguns casos gerais em que se têm apenas informações qualitativas. Por fim, planos de fase especiais, entre os quais está o do modelo IS-LM, e a técnica da linearização para sistemas de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem são também discutidos.

Palavras-chave: plano de fase, dinâmica econômica, estabilidade

Phase Planes and Economic Theory

Abstract

The phase plane construction is seen here from the viewpoint of economic theory. A first illustration of stability analysis is done for a linear differential equation. Next, the common diagrammatic technique in economics, known as the four-quadrant diagram, is used to build curves that represent the time behavior of the variables from a system of two differential equations. Then, the phase plane is constructed in a sequence of practical steps both for specific differential equation systems and for some general cases in which only qualitative information is given. Finally, some special cases of phase planes, including the IS-LM model, and the procedure for linearizing first-order non-linear systems of differential equations are also briefly discussed.

Key words: phase plane, economic dynamics, stability.

JEL codes:

* O autor agradece por conta de ajuda e discussões a: Denise Zaions (AGERGS), Fernando Seabra (UFSC), Jaylson J.Silveira (UNESP-Araraquara), Jean-Luc Rosinger (UFSC) e Roberto C.Moraes (UFRGS). O bolsista de iniciação científica Rimenez Tuon preparou os gráficos.

Planos de Fase e Teoria Econômica

Introdução

A técnica do plano de fase é essencial para o estudo da moderna macroeconomia, especialmente a de longo prazo. Permite o estudo qualitativo da estabilidade de um sistema de equações diferenciais, muitas vezes apresentado apenas de forma implícita. No estudo da estabilidade do equilíbrio de um modelo IS-LM, no momento em que se pergunta o que ocorre no sistema quando um dos mercados está em desequilíbrio e se diz que uma das variáveis se ajusta numa dada direção, está-se implicitamente utilizando um sistema de equações diferenciais. O modelo contém duas equações diferenciais que permitem prever se o sistema converge para o equilíbrio.

Uma análise de estabilidade do equilíbrio bastante usada é o modelo de oferta e demanda. Praticamente todo estudante de primeiro ano de um curso de Economia aprende que um excesso de demanda leva a um aumento de preço num mercado competitivo. Implícito nesse raciocínio está uma equação diferencial que liga a variação do preço no tempo como uma função do excesso de demanda do bem.

Na pós-graduação, a lista de exemplos é bem mais ampla. Inclui desde os modelos de crescimento econômico até os modelos recentes de difusão tecnológica. Mas é em macroeconomia, incluindo aí a teoria do crescimento econômico, que as aplicações são mais generalizadas. Uma área ligada à teoria do crescimento é a discussão do tamanho da população mundial e de seu impacto ambiental.

Muitos estudantes estão familiarizados com o que alguns autores chamam de diagrama de fase, mas que outros preferem chamar de linha de fase.¹ Por exemplo, no gráfico de oferta e demanda, é usual mostrar, através de pequenas flechas sobre o eixo da variável preço, como o mercado se ajusta à medida que ocorra excesso de demanda ou excesso de oferta. Se o preço estiver fora de equilíbrio e ocorrer excesso de demanda, prevê-se normalmente que o preço aumenta. Uma flecha que aponta para a posição de equilíbrio é colocada sobre o eixo do preço para ilustrar isso. A linha de fase, nesse caso, seria o eixo do preço. No plano de fase, têm-se duas variáveis e duas equações diferenciais. Por exemplo, o modelo IS-LM tem duas variáveis, juro e renda, associadas a duas equações diferenciais implícitas. Os ajustamentos dinâmicos são então indicados no plano dessas duas variáveis.

O objetivo deste artigo é apresentar detalhadamente a técnica de construção do plano de fase a partir de um mínimo de informação sobre o sistema de equações diferenciais. Deverá facilitar o aprendizado dos alunos de primeiro semestre da pós-graduação e de estudantes de graduação em disciplinas de teoria econômica um pouco mais formais. É de se esperar que com o aumento da cultura matemática de professores e de alunos da graduação o uso explícito do plano de fase torne-se comum também nesse nível de ensino. Alguns erros comuns entre economistas profissionais, ao desenharem planos de fase, também poderão ser evitados.

O acesso a programas computacionais voltados para o processamento e o desenho de funções torna mais fácil a compreensão de técnicas como a do plano de fase no estudo da

¹ O caso de duas equações diferenciais envolve o plano de fase, que é o plano das duas variáveis de ajuste do sistema de equações diferenciais. Os diagramas de fase são os gráficos que mostram as trajetórias tanto no plano de fase como na linha de fase. A imagem ou retrato (*portrait*) de fase é o conjunto de trajetórias mostrado num diagrama de fase, que pode ser uma linha ou um plano. O retrato de fase é um dos instrumentos para a teoria qualitativa das equações diferenciais, desenvolvida a partir de pesquisas do matemático Henri Poincaré no período de 1860 a 1866. Ver Chiang (1982, cap.14), Boyce e DiPrima (1997, seq.2.6 e 9.1; p.325-326) e Shone (1997, seq.2.4 e 4.2).

teoria econômica. Estão disponíveis no mercado programas como o *Mathematica*, *Maple V*, *Derive*, *Macysma*, *MathLab* e *MathCad*.² Esses programas permitem o manuseio de funções, tanto para o cálculo de seus valores como para sua plotagem³. Alguns deles vão muito além disso, ao permitir até operações algébricas em casos literais. Contudo, o acesso é ainda restrito para a maioria dos estudantes de Economia, tanto pela dificuldade do preço, mesmo para as escolas, como pela necessidade de se aprender uma nova linguagem de programação. Tal aprendizado pode não valer a pena para alguém que queira apenas estudar alguns gráficos ilustrativos dos poucos modelos apresentados ao longo de um curso de graduação. Mas a tendência é tais programas se tornarem mais simples para o usuário e seu uso se tornar comum.

Mesmo assim, a análise qualitativa de equações diferenciais, freqüente em teoria econômica, embora possa ser facilitada pela moderna computação, ainda exige a compreensão básica do plano de fase. Além disso, ela é insubstituível em casos com apenas informações qualitativas sobre as funções e as equações diferenciais de um modelo. As informações qualitativas que se têm em mente são os sinais de derivadas parciais.

Os textos de matemática especializados em equações diferenciais são normalmente orientados para as necessidades das ciências físicas e suas aplicações. A discussão qualitativa é reservada para capítulos finais e usada apenas em estudos avançados. Em contraste com isso, o estudante de Economia é exposto a diagramas de fase, até de forma explícita, já no nível de graduação.

No ensino de matemática para economistas, os textos em português mais usados no Brasil até recentemente, tanto na graduação como na pós, ainda não incluíam discussões da técnica do plano de fase. O mais usado deles, Chiang (1982), apresentava diagramas de fase apenas para o caso de uma equação diferencial, embora a edição posterior em inglês, de 1984, discutisse planos de fase. Textos mais recentes, como Simon e Blume (1994), traduzido recentemente para o português, e Shone(1997), discutem o plano de fase com ênfase no estudo de equações diferenciais específicas, assim como o fazem os textos voltados para as ciências físicas (Ross, 1974, cap.13; Wylie, 1979, cap.14; Boyce e DiPrima, 1997, cap.9).⁴ O domínio da técnica do plano de fase para uso em modelos com informação qualitativa exige investimento no estudo de tais textos.⁵

Com a intenção de facilitar o entendimento do economista, usa-se num primeiro momento a técnica dos quatro gráficos justapostos na construção de um diagrama de fase para um sistema de equações diferenciais. A técnica dos quatro gráficos justapostos ainda tem sido usada em Economia na solução gráfica de sistemas de equações. Em geral, ela envolve duas equações com três variáveis e seu uso equivale a isolar um par diferente de variáveis, mantendo a terceira como variável paramétrica. A técnica aparece principalmente em textos de macroeconomia para a graduação como, por exemplo, em Lopes e Vasconcellos (1998,

² Shone (1997) é um texto sobre equações diferenciais em Economia baseado no uso de tais programas, incluindo comandos do *Mathematica* e do *Maple V*. Em português, Boyce e DiPrima (1997) usam programas desse tipo para ilustração gráfica e recomendam exercícios baseados nos mesmos. O presente artigo usa o *Maple V*.

³ Esse anglicismo, usado pelos matemáticos para descrever tais ações mais precisamente, está dicionarizado. Por sinal, os ingleses adaptaram a palavra *pelote* do francês antigo (ver *Webster's New World Dictionary*), com um significado diferente de nossa "pelota", para criar *to plot*. O idioma português adaptou "pelota" do espanhol.

⁴ O rigoroso e atualizado texto de Braga, Kannebley Jr.e Orellano (2003), ao qual só tivemos acesso depois que a primeira versão deste artigo já tinha sido escrita, apresenta na seq.11.6.4 uma análise do diagrama de fase ainda inspirada na linguagem da Física. Além disso, não inclui as trajetórias. Portanto, ainda acreditamos que nossa abordagem, pelo menos entre os textos em português, é mais acessível aos estudantes de Economia.

⁵ O caso de equações a diferenças não será considerado no presente trabalho. Contudo, o plano de fase é de mesma natureza e o domínio da técnica para equações diferenciais permite a migração com baixo custo para o estudante. Ver Shone (1997, cap.5).

p.151) e Gordon (2000, p.75 e 144).⁶ O texto de macroeconomia mais antigo a usar a técnica dos quatro gráficos justapostos parece ser o de Dernburg e McDougall (1971), cuja primeira edição de 1960 já incluía essa técnica. Dos artigos clássicos anteriores, Hicks (1937) faz uma dedução verbal das curvas IS e LM e Smith (1956) apenas alinha três gráficos para ilustrar a necessidade de consistência entre as soluções obtidas em subconjuntos do sistema de equações, tomando as curvas IS-LM como dadas. Embora os gráficos de Meade (1952) lembrem os gráficos justapostos, ele usa outra técnica gráfica, superpondo gráficos cartesianos, em vez de usar a técnica dos quatro gráficos justapostos. Assim, é quase certo que Dernburg e McDougall foram os primeiros autores a adotarem a técnica, pelo menos entre os economistas. No Brasil, Simonsen (1969, p.78) havia introduzido essa técnica para o estudo da estabilidade de um modelo de oferta e demanda. Posteriormente, Simonsen (1974) usou a técnica em várias situações em seu texto de macroeconomia, além da mais comum do modelo IS-LM, embora a tenha expurgado da nova edição do livro (Simonsen e Cysne, 1989), numa evidência de que a técnica perdera espaço no nível de pós-graduação.

É preciso ter em mente que o tratamento geométrico restringe os tipos de equações diferenciais que podem ser discutidos com pouca informação. No caso da técnica do plano de fase, podem ser estudados os sistemas de duas equações lineares de primeira ordem autônomos. Em sistemas autônomos, a variável t não aparece explicitamente. Isso torna o plano de fase independente da posição inicial no tempo para cada variável do sistema.⁷ Alguns sistemas de equações diferenciais não-lineares podem também ser considerados através da técnica da linearização ou quando se tem informações sobre a forma das funções envolvidas nas equações diferenciais.

A próxima seção começa com um exemplo específico, preparatório para o estudo posterior da técnica do plano de fase. Considera-se o caso de uma única equação diferencial linear com a correspondente análise qualitativa da estabilidade. Em seguida, usa-se uma técnica dos quatro gráficos justapostos, para construir curvas que ilustram o comportamento das variáveis básicas do modelo ao longo do tempo. A seção seguinte apresenta a técnica do plano de fase na forma de passos práticos, ainda para um sistema específico de equações diferenciais. Na seção subsequente, aplica-se a técnica para um caso geral em que se tem apenas informações qualitativas sobre o sistema. Segue uma discussão de imagens de fase especiais. Por fim, discute-se a técnica da linearização para sistemas de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem.

Linha de fase

A análise qualitativa de uma única equação diferencial linear de primeira ordem é relativamente fácil. Basta utilizar a própria equação diferencial e tratar a derivada como uma variável.

Tome-se a seguinte equação diferencial linear homogênea, com coeficiente constante:

$$\dot{y} = ay$$

onde y é função de t , $\dot{y} \equiv dy/dt$ e a é uma constante. Uma solução particular é

$$y = y_0 e^{at}$$

onde y_0 é um valor inicial⁸ de y , definido em t_0 . Como a variável t representa usualmente a variável tempo, pode-se interpretar a solução particular como uma descrição do valor

⁶ Em inglês, a técnica é chamada de "four-quadrant diagram." Isso decorre provavelmente de seu uso na construção das curvas IS-LM, onde apenas os primeiros quadrantes de cada gráfico são relevantes. Assim, o gráfico parece um gráfico cartesiano comum, apenas tendo as variáveis redefinidas em cada quadrante. Mas é uma aparência enganosa, pois na verdade são quatro gráficos cartesianos.

⁷ Ver Boyce e DiPrima (1997, sec.9.1) para um exemplo desse caso.

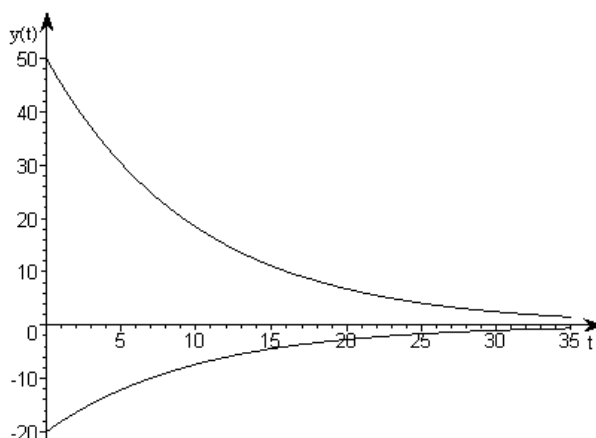
⁸ Um valor inicial para a variável que define a equação diferencial é um tipo de condição de contorno que deve ser satisfeita na solução da equação.

assumido pela variável y em cada ponto do tempo a partir de t_0 . Se $a < 0$, então y tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, e $y = 0$ é o valor de equilíbrio da variável y . Esse comportamento da variável y decorre da própria equação diferencial, que pode ser reescrita como

$$\frac{\dot{y}}{y} = a$$

sendo interpretável como a taxa de crescimento da variável y . Como a é negativa, tem-se crescimento negativo ou, como se diz em física, decaimento. A Figura 1 apresenta curvas de solução para $a = -0,1$ e valores iniciais de $y_0 = 50$ ou de $y_0 = -20$. O caso de $y_0 = 50$ ilustra o decaimento. Embora o valor inicial negativo, ($y_0 = -20$), ilustre crescimento, os modelos desse tipo em Economia⁹ usualmente envolvem $a > 0$ com valor inicial positivo. Nesses casos, as funções se afastariam do eixo horizontal a partir dos valores iniciais.

Figura 1 - Funções referentes a soluções específicas alternativas

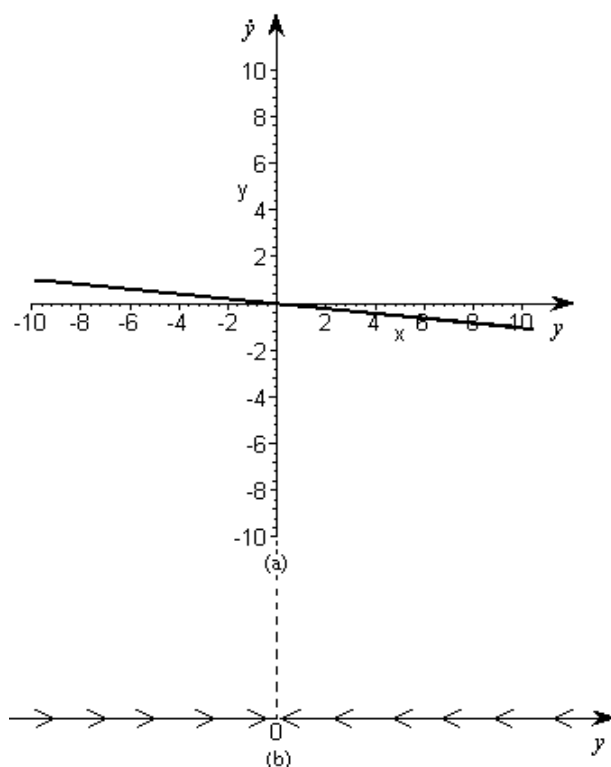


Uma forma alternativa de estudo da estabilidade é a partir de um gráfico da própria equação diferencial. Pode-se interpretar \dot{y} como uma função de y , deixando-se a variável t por trás do cenário. Considerando-se a derivada como variável, representa-se graficamente a equação diferencial na Figura 2.a, para $a < 0$. Dado $y > 0$, tem-se que $\dot{y} < 0$. Se o valor inicial de y for maior do que o valor de equilíbrio ($y = 0$), então y diminui com a passagem do tempo. Isso é ilustrado na Figura 2.b, que apresenta a linha de fase. Nessa linha, marca-se inicialmente o ponto de equilíbrio. Sabe-se, com base na Figura 2.a, que o ponto de equilíbrio delimita intervalos de valores de y para os quais \dot{y} tem sinal conhecido. Assim, é só desenhar, nessa linha, flechas direcionais que ilustram o sentido de mudança da variável y com a passagem do tempo. Como y converge para o valor de equilíbrio com a passagem do tempo, diz-se que o equilíbrio é estável.¹⁰

⁹ Shone (1997, p.30) apresenta um modelo populacional malthusiano simplificado desse tipo. De fato, para quaisquer projeções de variáveis em que se presuma uma taxa de crescimento constante, o modelo implícito é esse.

¹⁰ O ponto de equilíbrio estável é também chamado de ponto crítico de atração (*attractor critical point*). Define-se o ponto crítico como aquele em que $ay = 0$. Devido a dy/dt ser aí nula, o ponto crítico é tratado como equivalente ao ponto de equilíbrio. Ver Shone (1997, p.47-51).

Figura 2 - Diagrama de fase para a equação diferencial linear da Fig.1



É comum, pelo menos na área de Economia, colocar a linha de fase sobre o eixo da variável y ou sobre a curva no próprio gráfico da equação diferencial.¹¹ Esse gráfico é então chamado de diagrama de fase. O importante a reter na linha de fase é a representação qualitativa das direções em que a variável sob estudo se altera com a passagem do tempo; é qualitativa no sentido de não ser necessária a informação específica sobre as funções que descrevem soluções particulares. Mesmo assim, pode-se fazer afirmações sobre a convergência da variável para um ponto crítico. Essa idéia é estendida a seguir para o caso de duas variáveis, na forma do plano de fase.

Da solução das equações diferenciais às trajetórias

De um sistema específico de equações diferenciais sob valores iniciais dados para cada uma das variáveis do sistema, obtém-se uma solução particular, e esta pode ser ilustrada geometricamente, em especial com a ajuda de um computador. A presente discussão, contudo, busca uma técnica gráfica para casos em que não se tem um sistema específico de equações diferenciais. Ao mesmo tempo, um esforço será feito para se usar técnicas familiares em Economia.

¹¹ No modelo de oferta e demanda, usualmente não se faz a análise no equivalente à Figura 2. Isso, contudo, é feito por Simonsen (1969, p.78) via substituição da variável "excesso de demanda" pela variável "preço" na equação diferencial. Para obter a parte (a) da Figura 2, ele usa a técnica dos quatro gráficos justapostos.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais homogêneas lineares:

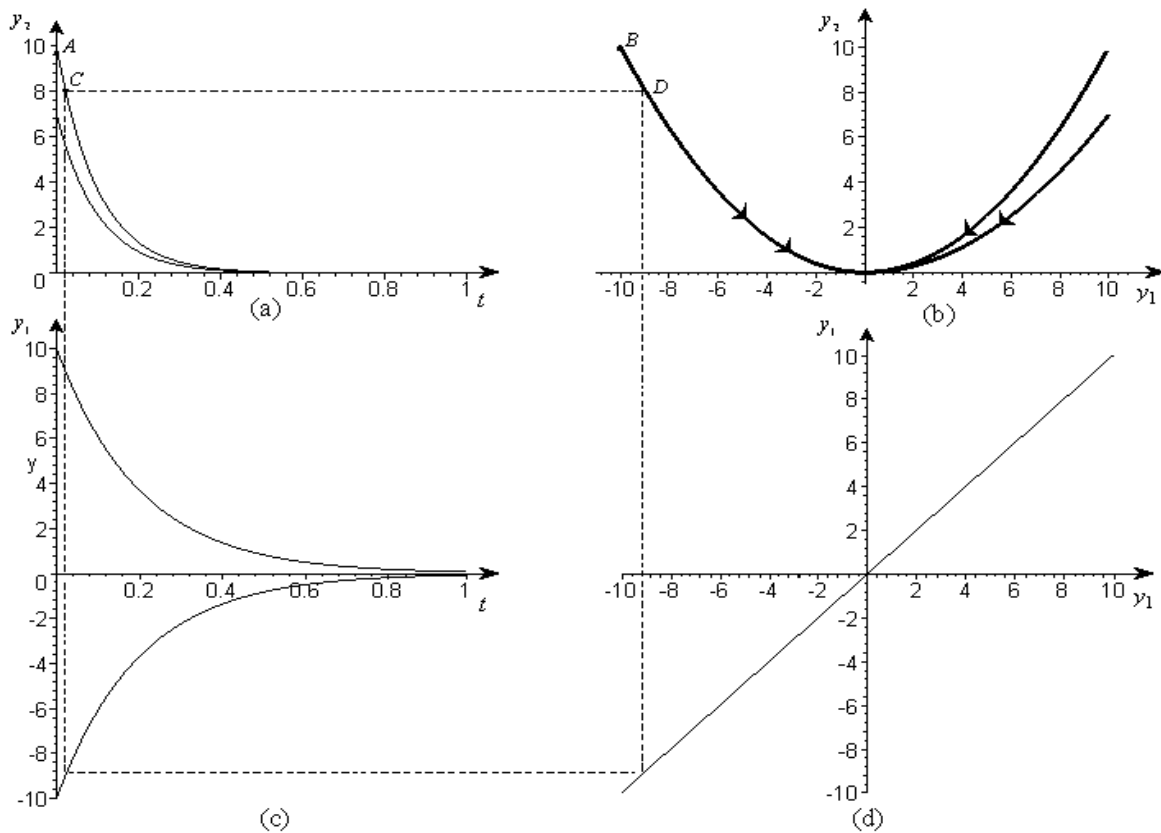
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -5y_1 \\ \dot{y}_2 &= -10y_2 \end{aligned} \quad (1)$$

cuja solução geral é

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1 e^{-5t} \\ y_2 &= k_2 e^{-10t} \end{aligned} \quad (2)$$

Dadas essas soluções do sistema de equações diferenciais, é possível esboçar as trajetórias (caminhos ou órbitas, segundo Boyce e DiPrima, 1997, p.326, ou *streamlines*,¹² segundo Chiang, 1984, p.631), com a técnica dos quatro diagramas justapostos.¹³ Isso é feito na Figura 3, para diferentes valores iniciais ou condições de contorno. Cada trajetória está associada a uma condição de contorno.¹⁴

Figura 3 - Os quatro gráficos justapostos e trajetórias de um nóulo impróprio



¹² É um termo da Física que pode ser traduzido como linhas de corrente ou formas aerodinâmicas.

¹³ Gandolfo (1980, p.325) usa uma técnica equivalente, mas omite o gráfico correspondente à reta de 45°, usada para transferir uma mesma variável de um gráfico para outro. Em vez disso, ele simplesmente marca os valores nos eixos correspondentes, o que também é válido, embora mais trabalhoso e desnecessário. Mas foi de onde tivemos a inspiração para o presente tratamento.

¹⁴ Como se mencionou na nota 1, esse diagrama do conjunto de trajetórias é chamado de retrato de fase ou de imagem de fase (*phase portrait*). Plano de fase é apenas o plano em que as trajetórias estão desenhadas. Logo o nome adequado para a técnica deveria fazer referência ao retrato de fase. Mas preferimos manter a tradição do nome de técnica do plano de fase como equivalente ao nome tecnicamente correto..

Algumas propriedades das trajetórias podem ser ilustradas também pela Figura 3. Dado que cada curva de solução é definida por um par de valores iniciais e que cada trajetória é definida por um par de curvas de solução, há um número infinito delas. Para ver isso pela Figura 3, basta apenas desenhar novas curvas de solução e as correspondentes trajetórias.

No caso ilustrado pela Figura 3, as trajetórias parecem-se com partes de parábolas. Das funções (2), reescrevendo-as como função da variável y_1 , obtém-se

$$y_2 = \frac{k_2}{k_1^2} y_1^2 \quad (3)$$

que é a expressão de uma parábola. Deve-se, no entanto, lembrar que cada par de trajetórias é apenas parte da parábola, pois as curvas de solução aparecem em apenas um dos quadrantes de cada gráfico, conforme as figuras 3.a e 3.c. Na Figura 3, há duas curvas de solução associadas a uma trajetória por meio de um retângulo pontilhado, como se faz na técnica dos gráficos justapostos. Os pontos iniciais estão claramente definidos, com a trajetória convergindo para a origem à medida que o tempo passa ($t \rightarrow \infty$). Isso é ilustrado por flechas desenhadas sobre a trajetória correspondente na Figura 3.b. Assim, de qualquer posição inicial ($t=0$), sabe-se a direção em que as variáveis mudam simultaneamente, com a passagem do tempo. O ponto para o qual todas as trajetórias convergem é o ponto de equilíbrio do sistema, no caso a origem da Figura 3.b.

Dessa propriedade decorre outra. Para uma dada trajetória, estão associados vários pares de curvas de solução possíveis. Para que isso ocorra, basta tomar, como valor inicial alternativo, um ponto ao longo de uma dada trajetória. Por exemplo, se o valor inicial fosse o ponto C em vez do ponto A na Figura 3.a, então o ponto inicial na trajetória correspondente seria D em vez de B na Figura 3.b.

Além disso, as trajetórias não se cruzam (Shone, 1997, p.118.). A inclinação da trajetória, no entanto, é variável. Pela derivada de (3), tem-se

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{2k_2}{k_1^2} y_1$$

Essa expressão também pode ser obtida a partir das equações diferenciais (1). Dividindo-se uma derivada pela outra, obtém-se

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{2y_2}{y_1}$$

A derivada anterior pode então ser obtida pela substituição de y_2 da expressão (3).

Apesar da facilidade de obtenção do gráfico das trajetórias com base na técnica dos gráficos justapostos, há naturalmente limitações. Uma delas ocorre quando as curvas de solução de cada variável envolvem flutuações, tornando difícil controlar os pontos de cruzamento no gráfico das trajetórias. A outra limitação é que ainda é necessário o conhecimento das equações diferenciais específicas e das respectivas soluções. O objetivo central do presente artigo é justo apresentar a técnica do plano de fase para casos em que só se têm informações qualitativas sobre um sistema não-específico. Assim, a próxima seção apresenta uma técnica que não depende da solução do sistema para se esboçarem as trajetórias.

Dos coeficientes das equações diferenciais às trajetórias

O procedimento para esboçar as trajetórias no plano de fase é apresentado em cinco passos. Para fins de ilustração gráfica, o sistema de equações diferenciais é o seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2y_1 - 5y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - 2y_2 \end{aligned} \quad (5)$$

É um sistema homogêneo, o que faz com que as integrais particulares sejam nulas e o ponto crítico ocorra na origem. Embora a apresentação se faça em termos desse sistema específico, por conta das ilustrações gráficas, estar-se-á tendo em mente o sistema linear:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2\end{aligned}\tag{6}$$

ou, em termos matriciais,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

O ponto crítico desse sistema é $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e representa a única solução do sistema de equações diferenciais para $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, desde que o determinante de \mathbf{A} não seja nulo.

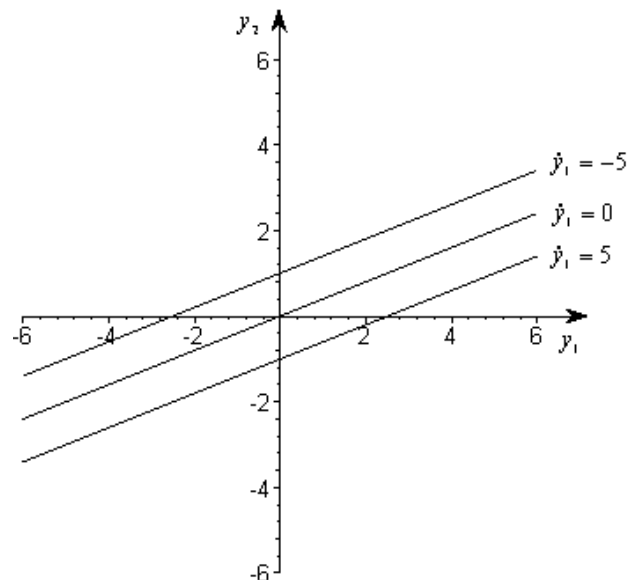
Passo 1: achar as curvas de nível

O primeiro passo na busca das trajetórias das variáveis do sistema é encontrar o ponto crítico, pois é a referência para o estudo qualitativo das soluções do sistema. Cada equação diferencial do sistema constitui um plano num espaço tridimensional. A primeira equação diferencial, por exemplo, envolve o espaço $y_1 y_2 \dot{y}_1$. Para diferentes valores de \dot{y}_1 , pode-se desenhar curvas de nível no espaço $y_1 y_2$, ficando para a imaginação do leitor o eixo correspondente à variável \dot{y}_1 . A primeira equação diferencial, escrita de forma conveniente para sua representação gráfica, torna-se

$$y_2 = \frac{\dot{y}_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} y_1.$$

Conforme se verifica pela Figura 4, a curva de nível¹⁵ correspondente a $\dot{y}_1 = 0$ é a que passa pela origem e a que deverá ser considerada na determinação do ponto crítico do sistema.

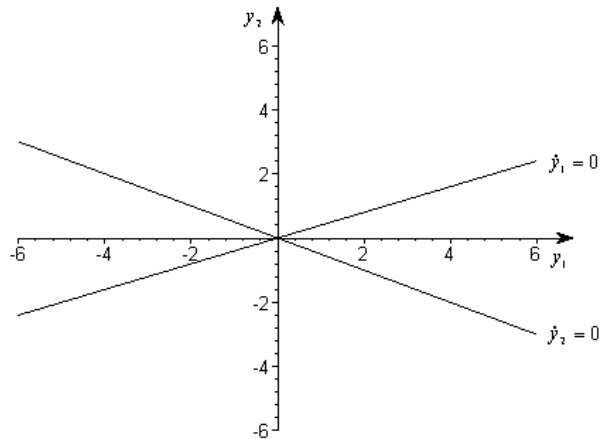
Figura 4 - Cortes seccionais da superfície de uma equação diferencial



¹⁵ São as *demarcation curves* (Chiang, 1984, p.629) ou as linhas de equilíbrio (Shone, 1997, p.120). O economista as identificará como do mesmo grupo das isoquantas, das isoutilidades (curvas de indiferença) ou das isolucros.

Com a outra curva de nível, é possível localizar graficamente o ponto crítico do sistema de equações. Na Figura 5, o ponto crítico é obtido pelo cruzamento das curvas de nível correspondentes a $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$. Uma vez localizado o ponto crítico, pode-se partir para a descrição do comportamento temporal das variáveis do sistema através de suas trajetórias, no equivalente bidimensional da linha de fase.

Figura 5 - Curvas de nível e o ponto crítico



Passo 2: determinar os sinais de \dot{y}_i

Como para uma dada equação diferencial tem-se uma curva de nível para a qual \dot{y}_i é nula, pode-se localizar a região limitada por essa curva em que o sinal de \dot{y}_i é conhecido. Nessa região, haveria curvas de nível com valores de \dot{y}_i associados a elas cujo sinal seria conhecido. Portanto, os sinais das derivadas parciais de uma equação diferencial dão uma idéia do que está acontecendo na superfície correspondente à equação, quando desenhada em relação ao plano $y_1 y_2$, uma vez que as curvas de nível são representações de cortes seccionais dessa superfície. Essas derivadas são dadas por

$$\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_j} = a_{ij}$$

para diferentes combinações de i e j .

No sistema (6), para a primeira equação diferencial, as derivadas parciais são

$$\frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = 5$$

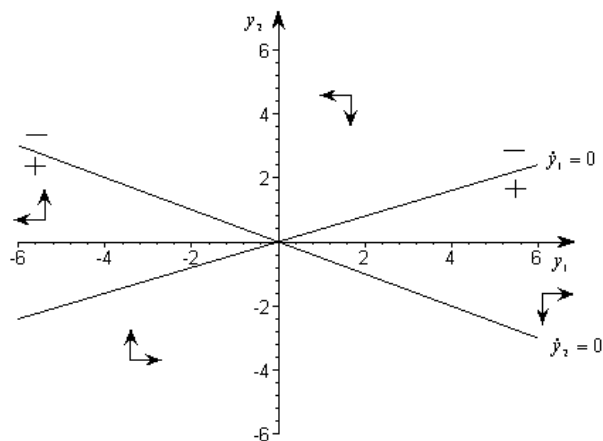
e

$$\frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} = 3,$$

ambas positivas. Isto significa que a variável \dot{y}_1 é crescente, ao se tomar como referência o eixo do gráfico cartesiano indicado pela derivada parcial. As curvas de nível acima daquela desenhada teriam rótulos de \dot{y}_1 positivo. Do mesmo modo, as curvas desenhadas abaixo teriam sinal negativo. Assim, nessas regiões, conhecem-se os sinais dessa derivada e se pode prever o comportamento da variável, mesmo sem se desenhar um eixo correspondente ao tempo.

Os sinais são representáveis graficamente por pequenas flechas que mostram o sentido de mudança com a passagem do tempo (*directional arrows*) para cada variável. Cada flecha está paralela ao eixo a cuja variável se refere.¹⁶ Na Figura 6, isso resulta em quatro pares de flechas, por conta de haver quatro combinações possíveis de direções de mudança das variáveis do sistema, associadas às regiões delimitadas pelas duas curvas de nível que se cruzam.

Figura 6 - Flechas direcionais



Com base nas flechas direcionais, é possível ter uma primeira idéia da trajetória simultânea das variáveis y_1 e y_2 .¹⁷ A partir de um ponto arbitrário, que está associado a valores iniciais para essas variáveis, pode-se prever para que direção segue a trajetória. Se um par de flechas aponta para nordeste, pode-se esboçar a curva para aquela direção, independente de isso levar imediatamente para a direção do ponto crítico. Como regra prática, tenta-se partir do ponto crítico quando as flechas direcionais apontam para longe dele e de pontos longe dele nos casos opostos. Na Figura 6, há uma mistura de sentidos em relação ao ponto crítico e se pode combinar os dois tipos de tentativas iniciais, dependendo da região em que se começar o esboço das trajetórias.

Passo 3: isóclinas

O objetivo agora é ter uma idéia da curvatura das trajetórias. Para seu esboço, estuda-se a inclinação em pontos dados do gráfico. A forma mais conveniente para casos em que só se têm informações qualitativas é tratar as duas curvas de níveis como isóclinas. Define-se uma isóclina de uma equação diferencial de primeira ordem como uma curva ao longo da qual a inclinação definida pela equação diferencial é constante (Ross, 1974, p.334; Shone, 1997, p.37).

As isóclinas são usadas em vários lugares na teoria microeconômica, comuns até em textos de graduação, embora com nomes diferentes. Provavelmente, a primeira exposição de um estudante a ela é na teoria do consumidor, quando se relaciona a quantidade demandada

¹⁶ Chiang (1984) utiliza os sinais + e - ao lado das curvas de nível como guias para desenhar as flechas direcionais. É um recurso conveniente para quem está se familiarizando com a técnica do plano de fase.

¹⁷ Gandolfo (1980, p.325) critica o procedimento comum entre economistas, desde Alfred Marshall, de fazer a análise qualitativa da estabilidade limitada às flechas direcionais, sem o esboço adequado do diagrama de fase. Vão, portanto, somente até o passo 2. Um mesmo conjunto de flechas direcionais pode ser consistente com diferentes planos de fase. As equações diferenciais do ajustamento dinâmico precisam ser incluídas na análise mesmo que literariamente ou em termos intuitivos.

de um bem com a renda. A isóclina é a linha renda-consumo, que serve de base para a demanda engelianiana. A linha renda-consumo tem como característica que a taxa marginal de substituição é sempre a mesma em cada um de seus pontos, pois reflete diferentes posições de equilíbrio do consumidor, associadas a diferentes níveis de renda, para dados preços relativos. Essa característica de inclinações dadas¹⁸ para as curvas de indiferença ao longo da renda-consumo é que as torna uma isóclina. A mesma técnica de análise gráfica é apresentada na teoria de custos da firma como o caminho de expansão, o qual mostra a demanda de insumos por uma firma minimizadora de custos, para diferentes níveis de produção. Ao longo do caminho de expansão a inclinação das isoquantas é dada. Como consequência, a taxa marginal de substituição (técnica) é dada, pois é definida como o negativo da inclinação. Ferguson (1972, cap.6), por exemplo, define o caminho de expansão como uma das possíveis isóclinas ao longo do mapa de isoquantas.

Antes de buscar as isóclinas associadas ao sistema de equações diferenciais, contudo, é preciso definir a inclinação das curvas que representam as trajetórias de y_1 e y_2 . Usando a técnica da diferencial, já mencionada na seção anterior, tem-se essa inclinação em forma implícita. A eliminação de dt do sistema (6) resulta em

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

Deste modo é possível estudar a inclinação das trajetórias em qualquer ponto do plano y_1y_2 . É de especial interesse para a presente análise qualitativa das soluções de um sistema de equações diferenciais estudar a inclinação das trajetórias em pontos sobre as curvas de nível de cada equação diferencial. Embora nem sempre o façam, as trajetórias do exemplo apresentado nas últimas figuras cruzam as curvas de nível.¹⁹ Assim, seria útil saber com que inclinação elas fazem tal cruzamento.

Para a curva de nível da segunda equação diferencial, tem-se que

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 0$$

Usando-se essa informação na expressão de derivada acima, tem-se ao longo da curva de nível em que $\dot{y}_2 = 0$, que

$$\frac{dy_2}{dy_1} = 0$$

Independente do ponto que se considere ao longo da curva de nível, essa inclinação será sempre a mesma. Portanto, essa curva de nível é uma isóclina com inclinação dada para as trajetórias que a cruzam. Uma regra prática útil é lembrar que essa inclinação das trajetórias sobre a curva de nível de $\dot{y}_2 = 0$ é perpendicular ao eixo de y_2 .

Ao se repetir o procedimento para a curva de nível em que $\dot{y}_1 = 0$, surge a complicação de um denominador nulo. Mas com o uso do conceito de limite, tem-se uma inclinação vertical para as trajetórias que cruzam essa curva de nível. Portanto, a curva de nível da primeira equação diferencial é também uma isóclina, agora com inclinações perpendiculares ao eixo de y_1 .²⁰

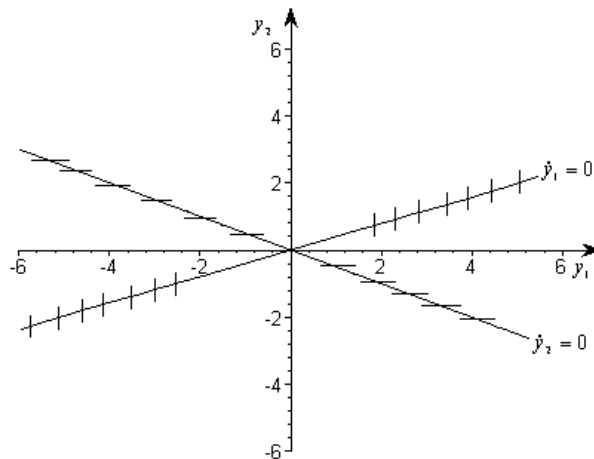
¹⁸ A taxa marginal de substituição é usualmente definida como o negativo da derivada da curva de indiferença num dado ponto. A definição é extensiva ao caso de n bens.

¹⁹ Ver-se-á na discussão dos casos especiais que as trajetórias mostradas na Figura 3 não cruzam as curvas de nível.

²⁰ Ver Chiang (1984, p.632).

As duas isóclinas são indicadas, na Figura 7, com ajuda de pequenos traços sobre cada curva de nível. Por exemplo, para a curva de nível em que $\dot{y}_1 = 0$ basta colocar os traços em posições perpendiculares ao eixo de y_1 .²¹

Figura 7 – Isóclinas



A técnica da isóclina pode ser estendida para qualquer outra reta que se queira. É com base na generalização dessa idéia para uma grade de retas verticais ou horizontais que se constrói o campo direcional, uma técnica útil quando se tem um sistema de equações diferenciais específico, devido a sua facilidade de manuseio em computadores.²² Essa técnica de análise qualitativa é utilizada em textos orientados para as ciências físicas como, por exemplo, Ross (1974) e Boyce e DiPrima (1997). Shone (1997) é um texto para economistas em que esse método é explorado amplamente como recurso pedagógico, inclusive na apresentação de modelos com apenas informação qualitativa, quando os autores montam exemplos específicos que ilustram o modelo mais geral e que podem ser convenientemente estudados pelo campo direcional.

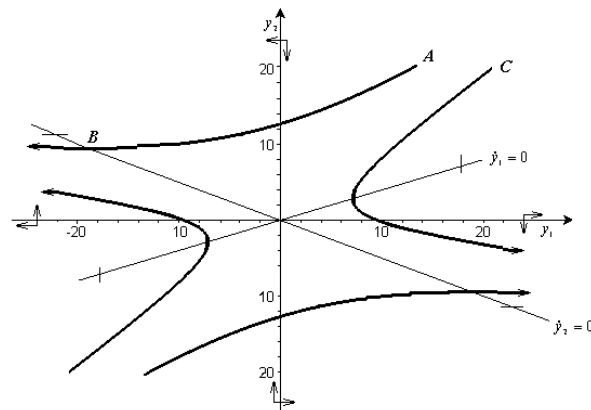
Passo 4: trajetórias

Combinando-se as direções de mudança temporal, dadas pelas flechas direcionais, com as inclinações ao longo das isóclinas, pode-se esboçar as trajetórias. Isso é feito na Figura 8. Começando em *A*, a trajetória segue a sudoeste, conforme indicado pelas flechas daquela região. Se a trajetória cruzar a curva de nível da segunda equação diferencial, ela o fará com inclinação horizontal, pela interpretação dessa curva de nível como isóclina. Após o cruzamento em *B*, a trajetória segue na direção noroeste, conforme indicado pelas flechas direcionais na nova região. Fica claro que a curva referente a essa trajetória pode ser orientada, o que se indica normalmente por um sinal de flecha ao seu final; às vezes, também ao longo dela.

²¹ Uma vez entendido esse resultado, o leitor passa a ter um critério simples para avaliar a correção de gráficos que mostram trajetórias. Uma passada de olhos em alguns textos de macroeconomia populares revelará muita imprecisão dos desenhistas, para não dizer descuido dos autores.

²² Na construção do campo direcional, programas computacionais como o *Mathematica* e o *Maple V* desenharam os traços indicativos da inclinação da trajetória sobre as isóclinas já com sua orientação, na forma de flechas. Isso também pode ser feito aqui com base na informação obtida no passo 2, sobre as flechas direcionais. Embora seja um passo redundante na presente técnica, pode ser útil para quem está iniciando.

Figura 8 – Trajetórias



As outras três trajetórias esboçadas na mesma figura são construídas do mesmo modo. Muitas outras trajetórias poderiam ser desenhadas, desde que pontos iniciais diferentes fossem considerados. Como já mencionado acima, diferentes pontos iniciais podem ser escolhidos ao longo de uma mesma trajetória nessa figura. Contudo, as trajetórias não se cruzam, o que é útil para o próximo passo.

Ainda na Figura 8, as trajetórias já desenhadas levam o sistema para fora do ponto crítico. Significa isso que o sistema não converge para o ponto crítico? Dito de forma consistente com os quatro gráficos justapostos (Figura 3), isso significa que as funções temporais das soluções específicas do sistema não são assíntotas ao eixo da variável tempo em seus gráficos?

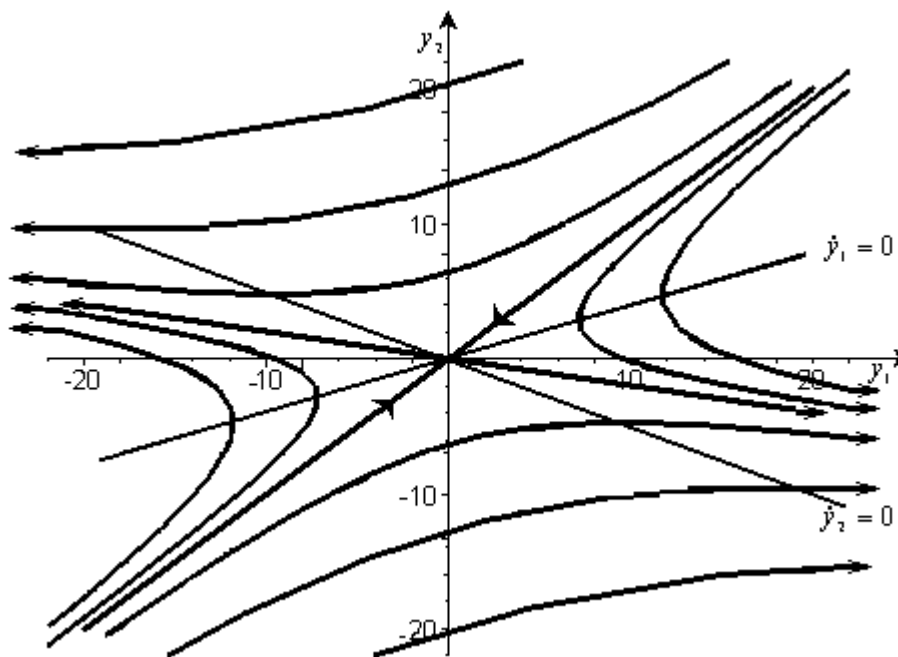
Passo 5: separatrizes

Dependendo dos tipos de trajetórias obtidas no passo 4, podem ocorrer trajetórias especiais chamadas de separatrizes. Na Figura 8, quando se esboçam novas trajetórias abaixo de trajetórias similares a A, haverá uma que atingirá o ponto crítico. Trajetórias mais abaixo dessa última já serão do tipo C, que cruzam a curva de nível da primeira equação diferencial. Numa direção inversa, há outra trajetória que também leva ao ponto crítico. Nas direções noroeste e sudeste, as separatrizes saem do ponto crítico. Assim, as separatrizes, no presente caso, podem ser vistas como trajetórias-limites das demais trajetórias, quando estas mudam de região.

Um gráfico completo com várias trajetórias possíveis é apresentado na Figura 9. É comum só se desenhar uma trajetória de cada tipo mais as separatrizes nos gráficos desse caso, tal como na Figura 8. Na Figura 9, no entanto, desenham-se várias trajetórias de cada tipo para enfatizar que há um grande número delas. O fato de só haver um par de trajetórias que levam ao ponto crítico nesse caso leva à convenção de que é um sistema instável. Esse ponto crítico é denominado de "ponto de sela", por referência à forma como as trajetórias se comportam.²³

²³ A expressão ponto de sela aparece em estudos de otimização quando, numa superfície, tem-se um máximo em relação a uma das variáveis independentes e um mínimo em relação à outra. Tal superfície teria um mapa de curvas de nível semelhante ao presente retrato de fase. Contudo, é bom lembrar que não se tem uma superfície correspondente no retrato de fase, mas apenas indicação de trajetórias percorridas pelo par de variáveis em seu plano de fase.

Figura 9 - Separatrizes de um ponto de sela



Resumo dos passos

Para fins práticos, o procedimento para análise qualitativa de sistemas de equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem pode ser resumido pelos seguintes passos:

1. desenhar as curvas de nível com base nos sinais e na relação entre os coeficientes da matriz A , os quais definem a inclinação e a posição relativa das curvas de nível;
2. verificar os sinais das derivadas temporais de cada variável do sistema em cada região delimitada pela respectiva curva de nível, combinando os resultados na forma de flechas direcionais em cada uma das quatro regiões possíveis;
3. marcar a inclinação das trajetórias ao longo das curvas de nível, as quais ficam assim caracterizadas como isóclinas;
4. esboçar as trajetórias;
5. definir as separatrizes, quando existirem.

Solução algébrica do caso apresentado graficamente

Embora os gráficos tenham sido desenhados com base num sistema específico, o sistema (5), os passos seguidos para a construção do retrato de fase presumiram o conhecimento apenas das posições das curvas de nível associadas a cada equação diferencial. A plausibilidade dos resultados pode ser vista pela solução algébrica do sistema.

Obtidos pela solução de

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$$

os autovalores de \mathbf{A} são $r = \pm 3$. Após a obtenção dos respectivos autovetores, tem-se a seguinte solução geral:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = k_1 e^{3t} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas com ajuda de condições de contorno sobre as variáveis do sistema. Os autovetores podem ser usados imediatamente para definir a inclinação das retas das separatrizes, pois a inclinação de cada vetor é igual à da reta que contém os respectivos pares de separatrizes.²⁴ Dado um ponto inicial $(y_1(0), y_2(0))$, determinam-se os valores das constantes arbitrárias, k_1 e k_2 . As soluções específicas, que permitem plotar as trajetórias a partir de pontos iniciais, escritas em forma conveniente para fins computacionais, são:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}$$

ou, em termos matriciais,

$$\mathbf{y} = \mathbf{V} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}(0)$$

onde \mathbf{V} é a matriz dos autovetores e \mathbf{D} é a matriz diagonal dos autovalores.²⁵

Essa forma matricial seria conveniente para quem não tivesse acesso a programas computacionais capazes de processar graficamente o próprio sistema de equações diferenciais. Tais programas, como já mencionado, permitem resolver equações específicas e plotar suas soluções diretamente.

Casos especiais

O sistema de equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes, como o das equações (6), apresenta várias possibilidades de imagens de fase, que dependem dos autovalores da respectiva matriz de coeficientes. Os casos apresentados acima envolviam autovalores reais. Autovalores reais diferentes, mas com sinais iguais, geram o nódulo impróprio (ver Figura 3). Autovalores reais diferentes, mas com sinais contrários, geram o ponto de sela (ver Figura 9). Contudo, na apresentação acima, o esboço da imagem foi feito apenas com base nos sinais das derivadas parciais das equações, o que permitiu verificar a inclinação de cada curva de nível e a posição das flechas direcionais. Ainda no caso de autovalores reais, há alguns casos especiais a serem notados para o estudo qualitativo através dos passos sugeridos aqui.

Um tipo especial de ponto crítico foi visto na Figura 3, que é um nódulo. Em termos da matriz de coeficientes \mathbf{A} , os elementos²⁶ a_{ij} têm valor nulo, enquanto que os elementos a_{ii} têm sinais não só iguais mas negativos no sistema de equações diferenciais (1). Assim,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a_{11} y_1 \\ \dot{y}_2 &= a_{22} y_2 \end{aligned}$$

onde $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ e $a_{11} > a_{22}$. A aplicação dos passos envolve alguns cuidados extras. No primeiro passo, o desenho das curvas de nível para $\dot{y}_i = 0$ leva em consideração que suas posições coincidem com os eixos cartesianos.²⁷ Se $\dot{y}_1 = 0$, tem-se de $\dot{y}_1 = a_{11} y_1$ que $y_1 = 0$, significando que essa curva de nível coincide com o eixo de y_2 . A curva de nível da segunda

²⁴ Ver Ross (1974, Teorema 13.2) ou Shone (1997, p.139).

²⁵ Definindo $\mathbf{V} e^{\mathbf{D}t} \equiv \mathbf{\Psi}(t)$, tem-se a matriz fundamental do sistema (Boyce e DiPrima, 1997, p.284).

²⁶ Para conveniência da exposição, presume-se que em a_{ij} tem-se i diferente de j .

²⁷ Há casos em que o nódulo tem as curvas de nível com inclinações diferentes dos eixos cartesianos, dependendo dos valores dos elementos que ficam fora da diagonal principal de \mathbf{A} . As qualificações, contudo, são as mesmas, ao se desenhar as trajetórias.

equação diferencial coincide com o outro eixo. Essa coincidência com um dos eixos cartesianos ocorre sempre que uma das derivadas parciais de uma das duas equações é nula. Ao mesmo tempo, se as equações diferenciais fossem não-homogêneas, portanto com o coeficiente linear diferente de zero, as curvas de nível seriam retas paralelas aos eixos cartesianos. O segundo passo é similar ao caso apresentado acima. O terceiro passo, contudo, requer cuidados, pois as isóclinas coincidem com os eixos cartesianos. Veja que agora a inclinação da trajetória coincide com a inclinação dos eixos, ou seja, elas não cruzam as curvas de nível. Isso cria a necessidade de ter-se informações adicionais sobre o sistema, além do sinal dos coeficientes, para se executar o quarto passo. A partir de um ponto inicial arbitrário não há como saber qual dos eixos será aproximado tangencialmente, ou seja, qual é a curvatura da trajetória, embora se saiba, com ajuda das flechas direcionais, em que direção se deva mover. Uma solução é desenhar uma isóclina adicional, e a mais conveniente é a reta $y_2 = y_1$, com tangente unitária, e que também passa pela origem. Substituindo essa reta na expressão da derivada da trajetória, dada por

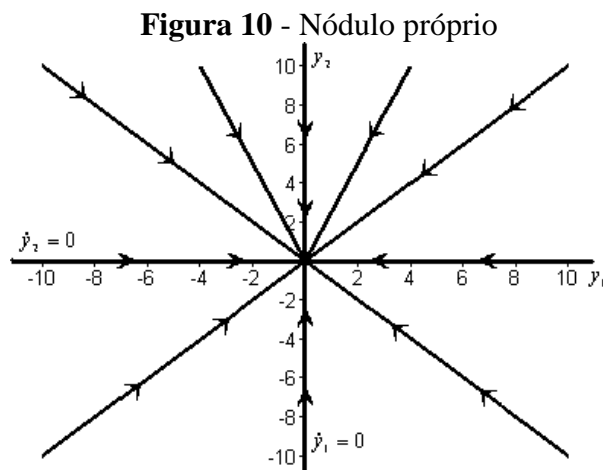
$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{a_{22}y_2}{a_{11}y_1},$$

tem-se

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{a_{22}}{a_{11}}$$

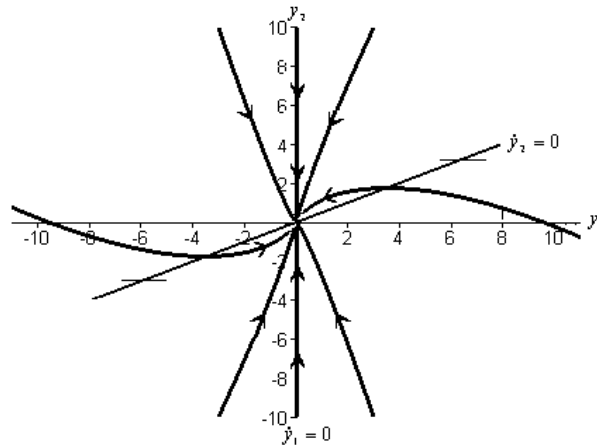
A inclinação da trajetória depende então da razão entre os dois coeficientes. Como informação qualitativa adicional sobre o sistema, é preciso saber qual é o maior dos dois coeficientes em termos absolutos, uma vez que os sinais, quando negativos, cancelam-se. No caso da Figura 3, a inclinação da trajetória ao longo da reta $y_2 = y_1$ é sempre maior do que a unidade. Isso permite prever que as trajetórias se aproximam do ponto crítico tangencialmente ao eixo horizontal, definindo assim seu tipo de curvatura em cada quadrante. Finalmente, vê-se que, como consequência do resultado obtido no passo 4, as separatrizes coincidem com as curvas de nível.

Um tipo de ponto crítico relacionado a esse é o nó próprio, que ocorre quando $a_{11} = a_{22}$, portanto com autovalores iguais. Em contraste, o caso acima é chamado de nó próprio impróprio. Pelo estudo de uma isóclina do tipo $y_2 = ky_1$, tem-se como principal consequência que as trajetórias são todas lineares. O conceito de separatriz perde sentido na análise de estabilidade. Os sinais de a_{ii} definem se o sistema tem convergência para o ponto crítico. A Figura 10 ilustra um caso de ponto crítico estável.



Como a repetição de autovalores pode ocorrer também para matrizes em que os elementos a_{ij} não são ambos nulos, tem-se a possibilidade de pontos críticos na forma de nódulos impróprios com trajetórias curvas. Isso exige informações mais precisas sobre a relação entre os coeficientes do sistema de equações diferenciais. Agora é necessário verificar se os coeficientes da matriz \mathbf{A} levam a autovalores iguais, o que aumenta a exigência informacional.²⁸ Uma possibilidade de ponto crítico é que as flechas direcionais gerem um movimento orbital que lembra o sentido horário ou anti-horário. O caso de autovalores negativos iguais é ilustrado pela Figura 11.

Figura 11 - Nódulo impróprio



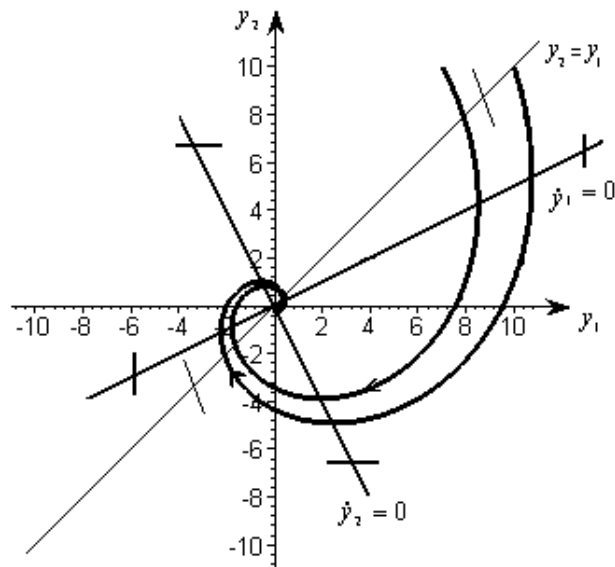
Um outro conjunto de retratos de fase aparece quando as raízes características são números complexos. Como se sabe do estudo básico de equações diferenciais é nesse caso que ocorrem as flutuações no valor de uma variável com a passagem do tempo.

Um caso bastante freqüente em Economia é o ponto crítico em forma de espiral. Ele é ilustrado pela Figura 12. Note que nesse caso as trajetórias são curvas e têm sentido horário, com convergência. Outra característica é que as separatrizes inexistem. A convergência para o ponto crítico está representada pelas flechas direcionais e pelo fato de as inclinações relativas das curvas de nível forçarem a trajetória para o ponto crítico. Rigorosamente, contudo, deve-se examinar o sinal da parte real dos autovalores.²⁹

²⁸ A regra tirada da álgebra elementar de que o discriminante da equação característica seja nulo para a igualdade dos autovalores torna-se aqui em $\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A}) = 0$, onde $\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$. Essa condição, que envolve o traço e o determinante da matriz, deveria ser analisada em termos dos parâmetros e das variáveis exógenas do modelo econômico.

²⁹ A parte real dos autovalores é dada por $\text{tr}(\mathbf{A})/2$ e seu sinal pode ser investigado a partir do modelo econômico. Como as flechas direcionais em sentido horário ou anti-horário podem ocorrer também no caso de raízes repetidas, como se viu no exemplo da Figura 11, pode ser necessário também investigar o sinal do discriminante da equação característica para se saber que caso está sendo desenhado. Mas pelas regras práticas vistas acima e com ajuda de isóclinas adicionais, pode ser possível saber em que caso se está sem a investigação do sinal do discriminante. Um resumo dos casos possíveis, pelas combinações de traço e determinante, é apresentado em Boyce e DiPrima (1997, cap.9).

Figura 12 – Espiral



O modelo IS-LM, onde o retrato de fase de um ponto crítico em espiral pode aparecer, envolve uma complicação adicional. Define-se o sistema dinâmico correspondente pela multiplicação de cada equação de excesso de demanda por uma constante que está associada à velocidade de ajustamento das variáveis renda e taxa de juros. O tipo de ponto crítico, se espiral ou não, depende do valor relativo dos coeficientes de ajustamento. Isso é mencionado por McCafferty (1990) e Shone (1997, p.275) e ilustrado com exemplos numéricos. Mas se pode definir esse intervalo a partir dos elementos da matriz **A**. Pelo estudo da seguinte condição:

$$\text{tr}(\mathbf{KA})^2 - 4\det(\mathbf{KA}) < 0$$

onde **K** é uma matriz diagonal dos coeficientes de ajustamento k_1 e k_2 e **A** é a matriz do sistema de equações diferenciais antes da multiplicação pelos coeficientes de ajustamento, isso resulta na forma quadrática

$$a_{11}^2 k_1^2 + [2a_{11}a_{22} - 4\det(\mathbf{A})]k_1 k_2 + a_{22}^2 k_2^2 < 0$$

que, como se espera, não é negativa definida para pares arbitrários dos coeficientes de ajustamento. Resolvendo para os coeficientes, obtém-se o seguinte intervalo

$$\frac{a_{11}a_{22} - 2a_{12}a_{21} - 2\sqrt{-a_{12}a_{21}\det(\mathbf{A})}}{a_{22}^2} < \frac{k_2}{k_1} < \frac{a_{11}a_{22} - 2a_{12}a_{21} + 2\sqrt{-a_{12}a_{21}\det(\mathbf{A})}}{a_{22}^2}$$

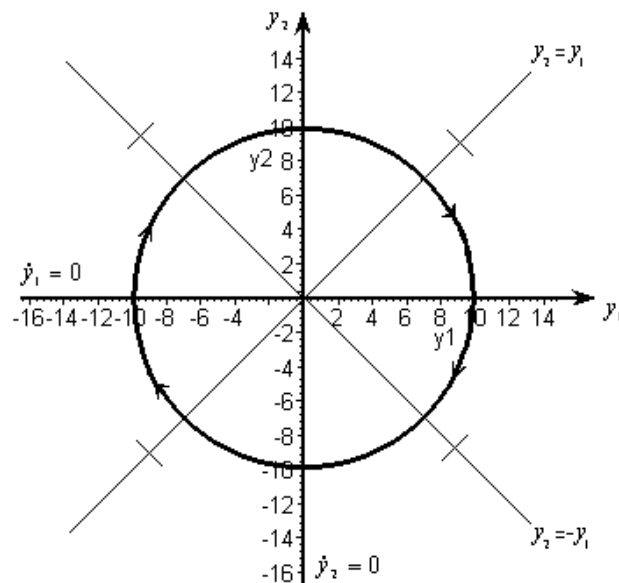
Portanto, o ponto crítico em espiral depende de a razão k_2/k_1 estar dentro desse intervalo. Nos limites do intervalo, têm-se autovalores iguais, e fora, autovalores diferentes, associados a diferentes tipos de nódulos, como visto acima.³⁰

Mas pode ocorrer de a parte real dos autovalores ser nula. Nesse caso, o sistema gera trajetórias circulares ou elípticas. A Figura 13 ilustra um caso mais simples, em que os elementos da diagonal principal da matriz **A** são nulos e os da secundária são iguais, mas com sinais opostos. Aplicando-se os passos práticos, vê-se que as flechas direcionais dão sentido horário e, com ajuda de isóclinas auxiliares, que as trajetórias são circulares. Esse tipo de

³⁰ Pelo estudo dos valores relativos, conclui-se que o coeficiente de ajustamento da função IS tem que ser maior do que o da LM, pelo menos se se quiser um plano de fase em espiral. Fala-se sempre no contrário, com base na evidência empírica!

ponto crítico é chamado de centro, mesmo quando as trajetórias são elípticas. É definido como um ponto estável.³¹

Figura 13 – Centro



Coefficientes lineares nulos ou derivadas parciais nulas são casos interessantes, como se viu em vários casos acima, quando as curvas de nível coincidiam com os eixos cartesianos. Um modelo econômico bastante conhecido dos economistas a partir da pós-graduação é o modelo de Ramsey. Esse modelo, contudo, envolve equações diferenciais não-lineares e não-homogêneas. Isso significa que os pontos críticos podem ocorrer fora da origem. A solução do modelo de Ramsey gera mais de um ponto crítico, mas o principal deles é um ponto de sela.³²

Na apresentação dos cinco passos acima, partiu-se de um caso específico de sistema de equações diferenciais. Tinha-se os valores numéricos dos coeficientes das equações. Em algumas situações, contudo, só se conhece o sinal desses coeficientes, mas não seu valor.

Nesse caso, pode-se tentar o esboço das curvas de nível do Passo 1 acima. Em geral, será preciso alguma informação adicional sobre se ambas as curvas de nível têm a mesma inclinação, para saber qual delas é a mais inclinada. A partir daí é só repetir os passos acima.

Uma forma de generalizar a análise é quando as equações diferenciais são dadas em forma geral, podendo ser não-lineares:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Neste caso, o que se pode fazer é aproximar as funções originais por uma expressão linear. É o que se chama de linearização³³ dos sistemas de equações diferenciais. Isso é feito por expansão de Taylor, apenas com o primeiro termo. Se o sistema for homogêneo, a expansão

³¹ Em sistemas não-lineares, surge a possibilidade de ciclos limites. Em tais casos, uma trajetória circular, chamada de órbita, pode ser aproximada a partir do ponto crítico ou de pontos dentro dela. De pontos iniciais localizados fora da órbita, o sistema converge assintoticamente para a órbita. Ver Boyce e DiPrima (1997, cap.9).

³² Ver Wan (1971), Chiang (1992, cap.5) ou Romer (1996, cap.2).

³³ Wan (1971, p.403-404) avalia a linearização para o estudo do plano de fase. A linearização só informa sobre a estabilidade local, em contraste com o retrato de fase, quando possível desenhar, que informa sobre a estabilidade global em sistemas não-lineares. Sobre a possibilidade de linearização, ver Simon e Blume (1994, seq.25.8), Shone (1997, seq.2.7) e Boyce e DiPrima (1997, cap.9).

será feita ao redor da origem no plano y_1y_2 . No caso acima, isso resulta no seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial f_1(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial f_1(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_2} y_2$$
$$\dot{y}_2 = \frac{\partial f_2(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial f_2(y_1^*, y_2^*)}{\partial y_2} y_2$$

utilizando-se o resultado $f_i(y_1^*, y_2^*) = 0$, para $i=1, 2$.

Conclusão

Espera-se que agora o leitor seja capaz de estudar a estabilidade de pontos críticos de sistemas de equações diferenciais lineares. É uma estabilidade global e pode ser vista para os seguintes tipos de pontos críticos: nódulo próprio, nódulo impróprio, ponto de sela, espiral e centro. Mas dependendo dos valores e sinais dos coeficientes da matriz do sistema de equações, o ponto crítico pode ser instável. A técnica dos cinco passos, com variável grau de exigência informacional, permite ter uma idéia razoável das propriedades do ponto crítico sem ser necessário resolver um sistema específico. O trabalho com funções genéricas é comum em teoria econômica.

Em sistemas não-lineares, onde o modelo dá informação sobre o formato das curvas de nível e sobre os sinais das derivadas parciais nas vizinhanças do ponto crítico, é possível estudar a estabilidade de pontos críticos. Mas de modo geral é necessário aplicar teoremas mais avançados para se estudar a estabilidade. Espera-se que o leitor desse artigo sintam-se mais confiante para empreender tais estudos, se sua área de estudos em teoria econômica assim o exigir. Mas uma estratégia mais prática para investigações preliminares é montar um exemplo específico e utilizar um programa computacional para desenhar o campo direcional do sistema.

Referências bibliográficas

- BOYCE, W.E.; DiPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 6.ed.rev. Trad.de H.Macedo e R.S.de Biasi. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 1998. Original em inglês de 1997.
- BRAGA, M.B.; KANNEBLEY Jr., S.; ORELLANO, V.I.F. *Matemática para Economistas*. São Paulo: Atlas, 2003.
- CHIANG, A.C. *Matemática para Economistas*. Trad.de R.C.Moraes. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e USP, 1982. Original em inglês de 1974.
- CHIANG, A.C. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 3.ed. New York: McGraw-Hill, 1984.
- CHIANG, A.C. *Elements of Dynamic Optimization*. New York: McGraw-Hill, 1992.
- DERNBURG, T.F.; McDOUGALL, D.M. *Macroeconomia*. 3.ed. São Paulo: Mestre Jou, 1971. Primeira edição em inglês, 1960.
- FERGUSON, C.E. *Microeconomia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1974. Trad.da 3.ed.em inglês de 1972.
- GANDOLFO, G. *Economic Dynamics*. 2.ed. Amsterdam: North-Holland, 1980.
- GORDON, R.J. *Macroeconomia*. 7.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

- HICKS, J.R. Mr.Keynes and the "classics": a suggested interpretation. *Econometrica*, v.5, p.147-159, Apr.1937.
- LOPES, L.M.; VASCONCELLOS, M.A.S.de (org.) *Manual de Macroeconomia: Nível Básico e Intermediário*. São Paulo: Atlas, 1998.
- McCAFFERTY, S. *Macroeconomic Theory*. New York: Harper & Row, 1990.
- MEADE, J.E. *A Geometry of International Trade*. London: George Allen & Unwin, 1952.
- ROMER, D. *Advanced Macroeconomics*. New York: McGraw-Hill, 1996.
- ROSS, S.L. *Differential Equations*. 2.ed. Lexington, Mass.: Xerox College Publ., 1974.
- SHONE, R. *Economic Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- SILVEIRA, J. J. *Abordagem dos ciclos endógenos: uma resenha da modelagem dos ciclos de negócios fundamentada no conceito de ciclo limite e no teorema de Poincaré-Bendixson*. Florianópolis, 1998. Repr. Dissertação (Mestrado em Economia) Dep. de Economia, UFSC-SC. Orientador: Jean-Luc Rosinger.
- SIMON, C.P., BLUME, L. *Mathematics for Economists*. New York: Norton, 1994.
- SIMONSEN, M.H. *Teoria Microeconômica*. Rio de Janeiro: FGV, 1969. Vol.III - Teoria da Concorrência Perfeita.
- SIMONSEN, M.H. *Macroeconomia*. Rio de Janeiro: APEC Editora, 1974.
- SIMONSEN, M.H.; CYSNE, R.P. *Macroeconomia*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1989.
- SMITH, W.L. A graphical exposition of the complete Keynesian system. *Southern Economic Journal*, v.23, p.115-125, Oct.1956.
- WAN, H.Y. *Economic Growth*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1971.
- WYLIE, R. *Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1979.

TEXTO PARA DISCUSSÃO

Nº 01/05– **Sanson**, Joao Rogério. *Planos de Fase e Teoria Econômica*.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SÓCIO-ECONÔMICO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
Campus Universitário – Trindade
CEP 88.049-970 – Florianópolis - Santa Catarina
Tel.: (48) 331.9458 – Fax (48) 331.9776